Cours I. 1.

MATHÉMATIQUE

INTUITION ET ENTENDEMENT
OU
IMAGE ET CONCEPT

PLAN

INTRODUCTION : *QU'EST-CE QUE LA SCIENCE ?*

I. INTUITIONNISME

A. EXPOSÉ

1. INTUITIONNISME
2. UTILITARISME

B. CRITIQUE

II. MATHESIS

1. IDÉE contre INTUITION

2. LES CATÉGORIES MATHÉMATIQUES

   A. DÉFINITION
   B. AXIOME
   C. THÉORÈME

3. LOGIQUE ET MATHÉMATIQUE

III. MATHÉMATIQUE ET RÉALITE

CONCLUSION : *LIMITES DE LA VÉRITE MATHÉMATIQUE ?*

INTRODUCTION

Provenant du grec *mathematikos*, lui-même dérivé du verbe *manthanein* signifiant apprendre, la « mathématique » veut dire étymologiquement l'apprentissage, l'étude ou la science.

" Le terme de mathématique signifie simplement science " (Descartes).

Or qu'est-ce qu'une science ? Par ce terme, issu du latin *scientia – scire* : savoir, on entendra toute investigation méthodique, rationnelle ou systématique et débouchant sur des résultats (théorèmes ou lois) certains ou « évidents », id est logiques ou vrais (indéniables) : déterminés et vérifiables par tous, quelque soit le domaine concerné par une telle recherche.

" Toute science est une connaissance certaine et évidente " (idem).

" Le caractère du logique est constitutif du caractère de la science." (Husserl)[1]

Par opposition à l'opinion, simple assertion subjective et contingente, sans réelle légitimation interne et sise généralement sur l'expérience, le discours scientifique n'admet que des énoncés dé-montrés ou prouvés (aux autres) : objectifs (universels) ou nécessaires et par là-même certains ou vrais.

" Ainsi la science est une aptitude à démontrer (...). Puisqu'il est impossible que soit autre qu'il n'est l'objet de la science prise au sens absolu, ce qui est connu par la science démonstrative sera nécessaire ;" (Aristote[2]).

Pour le dire avec un épistémologue moderne : " la science ... se confond avec la démonstration "[3]. La connaissance scientifique se caractérise ainsi à la fois par un moyen (méthode ou système), un but (vérité) et un objet (domaine).

Les deux premières caractéristiques, systématicité et vérité, sont étroitement liées. En l'absence d'un lien systématique entre ses différentes affirmations, un discours se réduirait à un agrégat de vérités éparses et ne mériterait pas le qualificatif de scientifique. Car en science il n'est pas question de se contenter de propositions partielles si vraisemblables soient-elles mais il importe de produire des vérités justifiées, id est enchaînées les unes aux autres. Ce n'est qu'ainsi que l'on dépassera une certitude empirique vers la certitude apodictique (nécessaire).

"Une théorie s'appelle science, dès lors qu'elle doit former un *système*, c'est-à-dire un tout de connaissances ordonné par des principes. ... On appellera science *proprement dite* uniquement celle dont la certitude est apodictique ; une connaissance qui peut contenir une certitude simplement empirique n'est un *savoir* qu'en un sens impropre." (Kant[4])

Mais de quoi la mathématique est-elle au juste la science ou quel est son objet ? Dans l'ordre des sciences on distinguera d'emblée celles qui, telles la physique, la biologie ou l'anthropologie, portent sur des secteurs repérables et délimités de la réalité, la nature (*phusis*), la vie (*bios*), l'homme (*anthropos*), dont nous faisons chaque jour l'expérience et dont elles énoncent le contenu ou le fond (qualités), et la discipline qui ne s'intéresse qu'à la forme (espace, figure, grandeur etc.) de tout être. Cette étude s'appellera naturellement mathématique ou science sans autre spécification, puisqu'elle n'a pas d'objet particulier mais se rapporte aux propriétés formelles de toutes les choses. En effet ce dont parle cette dernière -les figures (géométrie), les nombres (arithmétique), les équations (algèbre), les fonctions (analyse) ou les lieux (topologie)- ne se réfère à nulle réalité factuelle précise mais renvoie à des schèmes généraux valables pour tous les êtres.

Au demeurant les « objets » mathématiques ne partagent pas le statut des choses pouvant exister séparément, puisqu'ils n'ont d'être que rapportés les uns aux autres. Un nombre arithmétique par exemple n'est concevable qu'en relation avec les autres nombres, soit comme l'élément d'une suite dont il fait partie et qui elle-même se détermine par un ensemble de relations ou d'opérations. Pareillement une figure géométrique n'existe pas isolément, mais toujours dans le contexte des autres figures dont elle se compose ou dans lesquelles elle peut être décomposée. Aussi la mathématique n'a pas à proprement parler d'objet, n'étant intéressée que par des relations ou des opérations (addition, multiplication, translation, projection) qui engendrent ses « objets ».

" La mathématique traite les opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent s'appliquer." (G. Boole[5])

---

1 Descartes, *R.D.E.* IV ; II pp. 50 et 39 et Husserl, *I.L.T.C.* 1ère Sec. chap. I. § 2 p. 55

2 *E.N.* VI. 3. 1139 b 31-32 - *Organon, 2nds Anal*. I. 4. 73 a 21 ; cf. égal. 6. 74 b 5 et *Méta*. Δ. 5. 1015 b 7

3 J. Cavaillès, *S.L.T.S.* I p. 24

4 *1ers P.M.S.N.* Préf. pp. 364 et 365 ; cf. égal. *C.R.P.* Méthod. transc. chap. III. p. 621 et Husserl, *R.L.* 1. § 6

5

Et puisque des relations identiques (égalité, ordre, voisinage etc.) peuvent structurer des éléments différents, nonobstant la nature particulière de ces derniers, les divers chapitres de la mathématique s'entre-répondent forcément. Si à tout point géométrique correspondent bien deux cordonnées numériques et à la droite l'ensemble des nombres réels, géométrie et arithmétique se trouvent ainsi réunies dans l'analyse qui n'a à voir précisément qu'à des fonctions ou relations.
" Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse."
(H. Poincaré[6])

C'est d'ailleurs parce qu'elle n'est point contrainte par des données externes, qu'elle peut définir par elle-même ses « objets » et dérouler du même coup librement, par la seule déduction - démonstration, sans recours à la moindre expérience et donc sans aucune approximation, leurs « propriétés ».
" Les mathématiques sont une science déductive ; elles partent de certaines prémisses, pour arriver, par méthode de déduction exacte, aux diverses théorèmes qui les constituent." (Russell[7])
Nul ne peut y procéder autrement, comme le rappelait, selon la tradition, Euclide à un roi.
" Il n'y a pas de voie royale [impériale] vers la géométrie [qui mène au temple de la géométrie]."

Et pour obtenir ses résultats, la science mathématique se base exclusivement sur des règles logiques élémentaires, au premier rang desquelles le principe de non-contradiction qui permet de discriminer deux énoncés contraires et en conséquence de distinguer le vrai du faux.
" Le grand fondement des mathématiques est le principe de la contradiction ou de l'identité, c'est-à-dire qu'une énonciation ne saurait être vraie et fausse en même temps ;" (Leibniz)
Assurant la cohérence de ses démonstrations, il garantit la rigueur de ses théorèmes (gr. *théorêma* : « objet d'étude »), leur conférant le statut de raisonnements indiscutables. L'adjectif mathématique n'a-t-il pas fini par vouloir-dire indéniable, logique ou vrai et la déduction dont use cette discipline ne passe-t-elle pas pour l'idéal ou le prototype de toute démonstration véritable ?
" il n'y a que les sciences mathématiques qui soient capables d'une certitude démonstrative ;" (idem[8])

Non soumis aux aléas de l'expérience ni ou à ceux des objets concrets, un tel raisonnement confère aux énoncés mathématiques une plus grande certitude que celle des propositions des autres sciences.
"Par là on voit clairement pourquoi l'arithmétique et la géométrie sont beaucoup plus certaines que les autres sciences ; c'est que seules elles traitent d'un objet assez pur et simple pour n'admettre absolument rien que l'expérience ait rendu incertain, et qu'elles consistent tout entières en une suite de conséquences déduites par raisonnement." (Descartes)
Et puisqu'elle ne concerne nul domaine particulier, la mathématique peut s'appliquer à tous les champs du savoir, formant une science à la fois pure –sans objet externe- et universelle –transposable partout. Son raisonnement s'étendrait de plein droit à toutes les connaissances auxquelles il suffirait de donner une forme déductive ou mathématique, pour qu'elles puissent devenir des sciences authentiques.
" Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne ni de si cachées qu'on ne découvre." (idem)

Or quelles *relations* intéressent la mathématique, étant entendu qu'il en existe de toutes sortes (numériques, physiques, vitales, sociales, psychiques etc.) ? Une fois écartée la nature particulière des termes reliés, ne reste que leur forme, elle-même définie par des dimensions, grandeur ou quantité.
" Toutes les vérités des mathématiques, qui ne regardent que les nombres et les figures " (idem[9]).
C'est donc sur les rapports quantitatifs (égalité, inégalité, proportion, variation etc.) et uniquement sur eux et leur calcul que se concentrera nécessairement cette discipline.
" Son *but* ou son concept est la *grandeur*. ... La *matière* sur laquelle la mathématique offre un tel trésor réjouissant de vérités, est l'*espace* et l'*Un*. ... Car ce que la mathématique prend en considération c'est seulement la grandeur " (Hegel[10]).
Rien d'étonnant que l'arithmétique qui s'occupe des nombres forme la matrice de la mathématique.

---

6 *La Science et l'Hypothèse*, chap. II. p. 49 ; cf. égal. *La Valeur de la Science* V. p. 106
7 *Introduction à la philosophie mathématique* chap. XIV. p. 174
8 *2nd Écrit à Clarke* 1) in Œuvres p. 411 et *N.E.* IV chap. II § 9 p. 325 ; cf. égal. *S.D.P.P.E.R P.* Avt-Propos
9 *R.D.E.* II p. 41 (cf. Malebranche *E.M.R.* I. IX. p. 74 et VI. pp. 180-181) ; *D.M.* 2è p. p. 138 et *Méd.* 5è p. 312
10 *Ph.E.* Préf. III. pp. 103–105 ; cf. égal. *P.E.D.* Conf. II p. 49 ; *S.L.* L. 1er 2è sec. ;
vide Aristote, *Méta.* E. 1. 1026a 26 et K. 7. 1064b9 ; Leibniz, *Rép. 3è L. Arn.* et A. Comte *C.P.P.* 3è L. p. 71

Ceux-ci ne seraient-ils pas les déterminations quantitatives par excellence et universelles ?
" La mathématique est la reine des sciences et l'arithmétique la reine des mathématiques." (Gauss[11])

Tout semble pouvoir être figuré, nombré ou mis en équation.
" Tout est nombre " (Pythagore[12]).
La science physique, comme " tout savoir " du reste, n'eût jamais vu le jour sans " le fait de nombrer et de calculer " (Platon), faute de disposer du moyen de formuler des lois exactes qui se présentent toutes sous la forme d'équations mathématiques.
" Si, par exemple, de tous les arts, on retranchait, je suppose celui de nombrer, celui de mesurer et celui de peser, ce qui, de chacun d'eux, subsisterait alors n'aurait, pour bien dire, pas grande valeur." (idem[13])
Et de fait la mathématique fut historiquement la première des sciences -les dates en témoignent : Thalès et Pythagore, auteurs des premiers théorèmes mathématiques, précèdent Archimède ou Ptolémée et a fortiori Galilée ou Kepler, inventeurs des premières lois physiques et astronomiques.

Partant plus qu'une science exemplaire, la mathématique articulerait la langue commune à toutes les sciences et contiendrait en elle les principes de celles-ci. Ces dernières ne seraient ainsi que des sous-ensembles d'une science que l'on baptisera de mathématique universelle.
" Et si l'on y réfléchit plus attentivement, on remarque enfin que seules toutes les choses où l'on étudie l'ordre et la mesure se rattachent à la mathématique, sans qu'il importe que cette mesure soit cherchée dans des nombres, des figures, des astres, des sons, ou quelque autre objet ; on remarque ainsi qu'il doit y avoir quelque science générale expliquant tout ce qu'on peut chercher touchant l'ordre et la mesure sans application à une matière particulière, et que cette science est appelée, non pas d'un nom étranger mais d'un nom déjà ancien, mathématique universelle, parce qu'elle renferme tout ce pourquoi les autres sciences sont dites des parties de la mathématique." (Descartes[14])
Véritable grammaire de l'Être, elle édicterait les règles générales des étants et de leur appréhension ou connaissance ordonnée.

Loin de compter comme <u>une</u> science parmi d'autres, la mathématique constituerait <u>la</u> science même, le modèle en tout cas de la scientificité -" l'organon ... le modèle de la suprême évidence dans les autres sciences (...) cet orgueil de la raison humaine " (Kant)[15]-, dont devrait s'inspirer, dans la mesure du possible, toute connaissance qui prétend à la scientificité.
" Cette dénomination, qui a pris aujourd'hui une acception si déterminée, signifie simplement par elle-même la *science* en général ... la *science* par excellence. (...) C'est donc par l'étude des mathématiques, et seulement par elles, que l'on peut se faire une idée juste et approfondie de ce que c'est qu'une *science*." (A. Comte[16])
C'est dire sa nature paradigmatique, maintes fois soulignée par les philosophes, à commencer par Platon qui aurait fait graver à l'entrée de l'Académie : *"Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre !"*

Figure du Vrai, elle transcenderait son rôle de simple " prélude " (idem[17]) ou propédeutique à la Connaissance absolue et s'identifierait, " selon les modernes, [à] toute la Philosophie " qui ambitionne également le titre de " la science de la vérité " (Aristote[18]). A quelle autre vérité pourrait-on aspirer, si la démonstration mathématique s'avérait effectivement le fondement ou le principe incontournable de tout raisonnement véridique ?
" On ne saurait rien souhaiter de plus en matière de philosophie que d'en pouvoir donner une démonstration mathématique." (Descartes[19])
Elle exposerait en définitive la " règle de vérité " (Spinoza[20]) valable universellement : à l'aune de laquelle il importerait de mesurer la justesse de toutes nos affirmations.

---

[11] in W.S. von Walterhausen, *Gauss zum Gedächtnis* p. 79 (Sändig Reprint Verlag H.R. Wohlevend 1965)
[12] in Aristote, *Méta*. A 6 987 b 24 ; cf. égal. Z 11 1036 b 12 ; *Phys.* III. 4. 203 a 7 et Philolaos, *Frgt*. XI
[13] *Rép*. VII 522c et *Philèbe* 55e
[14] *R.D.E.* IV pp. 50-51 ; cf. égal. VI pp. 55-56 ; *D.M.* 2è partie pp. 138-139 et Cournot, *O.L.C.A.G* p. 355
[15] *D. 1770* Sec. II § 12 – *C.R.P.* Dial. tr. chap. II. 3è sec. p. 399
vide égal. Husserl, *R.L.* 1 chap. XI. § 71 p. 279 et Cournot, *O.L.C.A.G.* p. 368
[16] *Cours de philo. positive* 3è Leçon pp. 71-72 ; cf. égal. 40è p. 234
[17] in J. Philipon, *In Aristotelis de An. libros Comment.* (vide égal. Descartes, *R.D.E.* IV p. 49) et *Rép*. VII 531d
[18] *Méta*. A. 9. 992 a 30 et α. 1. 993 b 20
[19] *Lettre à Mersenne* 30 août 1640
[20] *E.* I. App. p. 349 ; cf. *P.P.D.* Préf. p. 147 et *P.M.* 2è par. chap. IX p. 284 ; cf. égal. Descartes, *E.B.* p. 1399

En s'inspirant de ses procédures, on mettrait donc un terme à toutes nos « disputes » et résoudrait du même coup toutes les énigmes « métaphysiques ». Aussi pour faire taire nos querelles, il conviendrait de traduire tous nos concepts en signes ou symboles mathématiques, selon le projet - rêve leibnizien d'" une caractéristique universelle ". Par après, disposant d'" un filum Ariadnes (fil d'Ariane) " (idem) de la pensée, il suffirait, à l'instar des mathématiciens, de se dire : "calculons" ou "comptons" (idem) pour solutionner tous les problèmes philosophiques.

" en sorte que toute démonstration procède selon une forme légitime, comme les calculs et que, si survient une erreur, il soit aussi facile de la découvrir et de la montrer aux autres qu'une erreur de calcul." (idem[21])

Ce faisant on réaliserait ce qui semble être l'Idéal platonicien du Savoir :

" En vérité, la fonction qui met sa confiance dans la mesure et le calcul est ce qu'il y a de meilleur dans l'âme."[22]

Autant dire finalement qu'à une *Doctrine de la Science* (Fichte) philosophique devrait se substituer une *Doctrine de la Science* (Bolzano) logico-mathématique.

Reste à se demander d'où le mathématicien lui-même tire-t-il ses vérités, c'est-à-dire comment valide-t-on les propositions mathématiques et s'assure-t-on ainsi " de la certitude et de l'évidence de leurs raisons " (Descartes[23]), et particulièrement des premières d'entre elles. Car si la science mathématique réside bien en l'enchaînement des démonstrations ou des raisons, toute sa valeur repose nécessairement sur la vérité des prémisses dont dépendent toutes ses déductions.

" Mais la science démonstrative est celle que nous avons par le fait même que nous sommes en possession de la démonstration : par conséquent, la démonstration est un syllogisme constitué à partir de prémisses nécessaires. Il faut, par suite, rechercher quelles sont les prémisses de la démonstration, et quelle est leur nature." (Aristote[24])

Ce qui revient à problématiser le statut même de la mathématique :

Que sont les vérités mathématiques ou Quel est le fondement/ l'origine de la Science (*Mathesis*) ?

Constitue-t-elle, comme on le croit souvent, la réalisation suprême ou ultime du discours humain ? Avec Husserl on se posera donc " la question de l'origine de la géométrie " et, au-delà ou plus radicalement, celle du " « fondement épistémologique » des sciences " en général.

La question est banale : qui ne s'est déjà interrogé, fût-ce de manière indirecte, sur la véracité du raisonnement mathématique, en se demandant quelle est sa finalité ou son utilité ?

" De toute antiquité, et même toujours à nouveau depuis des siècles, on s'est efforcé d'analyser les concepts qui se trouvent au fondement des mathématiques, les vérités élémentaires sur lesquelles elles sont construites et les méthodes qui leur ont valu en tout temps d'être considérées comme le modèle d'une déduction rigoureusement scientifique." (idem[25])

Et néanmoins fondamentale, s'il est vrai que celui-ci forme la syntaxe de tout discours scientifique voire la forme la plus haute de l'expression humaine : " l'honneur de l'esprit humain " (Jacobi[26]). Descartes et Leibniz ne furent-ils pas autant d'illustres mathématiciens que de grands philosophes ? Au-delà d'un problème épistémologique / technique concernant une ou peut-être la science, il s'agit d'une interrogation philosophique sur la connaissance ou le savoir en général et corrélativement sur l'homme, le désir de savoir étant le propre de l'humanité (*homo sapiens*).

" Tous les hommes désirent naturellement savoir " (Aristote[27]).

Pour y répondre il suffit d'examiner l'« évidence » - intuition dont se parent les « objets » et/ou théorèmes mathématiques, en étant attentif au double sens de cette dernière qui renvoie tantôt à une certitude - intuition sensible-visible (lat. *videre* : voir ou *intueri* : regarder), tantôt à une certitude – *"intuition"* (Descartes[28]) logique-rationnelle (indéniable). On commencera notre investigation par la première puisqu'elle est la plus naturelle, précédant chronologiquement l'autre.

---

21 *Ph. Sch.* VII (Ger.) p. 22 ; *De sc. univ. seu calc. philosophico* in *op. cit.* p. 200 et *L. à Arnauld* XXVII. p. 197 cf. égal. *Lettres à Jean Frédéric II* oct. 1671 ; fév. 1679 et *P.F.P.* p. 43

22 *Rép.* X 603a ; cf. égal. *Euthyphron* 7 bc et *Épinomis* 977 b

23 *D.M.* 1ère partie p. 130 ; cf. égal. 2è partie p. 138

24 *Organon*, *2nds Anal.* I. 4. 73 a 23 ; cf. égal. 2. 71 b 20 ; 6. 74 b 5 et *Méta.* Δ. 5. 1015 b 7

25 *O.G.* in *C.S.E.P.T.* App. III au § 9 a pp. 404 et 416 et *S.C.N.* Introd. in *Philosophie de l'arithmétique* p. 355 ; vide égal. E. Le Roy, *La pensée mathématique pure* chap. 1er Introduction générale

26 *Lettre à Legendre* 2/07/1830 in *G.W.* t. I p. 453

27 *Méta.* A. 1. 980 a 21 (vide Cours Introduction Générale 1. p. 8)

28 *R.D.E.* III p. 44 ; vide égal. Hegel, *Esth.* Id. B. chap. I. IV. p. 180 et Art symb. chap. III. B. 3. a) p. 171

I. Intuitionnisme

A. Exposé

1. Intuitionnisme proprement dit

La mathématique elle-même que l'on affuble souvent du titre flatteur de science pure, ne serait-elle pas redevable après tout à la nature et à nos sens de ses objets et démonstrations ? Les figures géo-métriques (du gr. *gê*: la terre et *metron* : mesure) et les nombres dits *naturels* (calcul vient du lat. *calculus* : caillou et tout nombre semble être nombre de quelque chose) seraient issus de notre expérience ou intuition quotidienne des corps et des formes naturels –constellations, ligne de l'horizon, cercles tracées dans l'eau par un jet de pierrre, agrégats ou multiplicités données etc.-, dont ils formeraient des " copies " ou des reflets.

" Les points, les lignes, les cercles que chacun a dans l'esprit sont, il me semble, de simples copies des points, lignes, cercles et carrés qu'il a connus par expérience." (J.S. Mill)

Aussi éloignés qu'ils paraissent des choses réelles, les concepts mathématiques gardent nécessairement la trace de leur parenté avec elles, issus qu'ils sont de ces dernières.

Tout au plus accordera-t-on que les êtres et les énoncés mathématiques jouissent d'une abstraction/généralité dont ne jouissent pas les corps physiques concrets et leurs descriptions, sans que cela contrevienne à leur origine foncièrement empirique ou sensible, les premiers devant être pensés comme une globalisation des seconds.

"Tous les nombres doivent être nombres de quelque chose, un être tel qu'un nombre abstrait n'a aucune existence. Mais tout en étant nombres de quelque chose, ils ne peuvent pas pour autant être nombres de n'importe quoi. Des énoncés intéressant les nombres jouissent donc de la propriété remarquable de pouvoir concerner l'ensemble des choses dans la mesure où ils portent sur tous les objets et sur toutes les variétés d'existence qui nous sont connues par expérience." (idem[29])

D'où les tirerions-nous autrement, vu que nous n'en disposons pas d'emblée mais les acquérons au fur et à mesure de notre apprentissage ?

En vain essayerait-on d'ailleurs de concevoir des entités mathématiques entièrement abstraites ou pures, on buterait toujours sur l'inévitable particularisation de notre pensée qui, à chaque fois qu'elle se donne une figure géométrique par exemple, se la représente fatalement sous une forme déterminée, *tel* triangle (équilatéral, isocèle, rectangulaire) et non *le* triangle en général, chose proprement impensable ou vide.

" Qu'on essaie de concevoir un triangle en général, qui ne soit ni *isocèle*, ni *scalène*, dont tous les côtés n'aient ni longueur particulière ni rapport particulier, et l'on percevra bientôt l'absurdité de toutes les opinions scolaires sur l'abstraction et les idées générales[1].

1. Cet argument est tiré du Dr Berkeley ;" (Hume[30])

Au mieux on concédera une universalité nominale, fruit d'une induction à partir de cas particuliers, aux notions mathématiques.

Quant à celles qui s'écartent par trop de ceux-là, et donc de notre expérience ou usage, telle l'idée de l'infini, à laquelle recourent pourtant en permanence les mathématiciens, on leur déniera toute légitimité logique, au nom de leur irreprésentabilité.

" Nous ne pouvons pas imaginer une ligne ou un espace infiniment grands – c'est donc une absurdité que d'énoncer ou de faire des propositions à leur sujet." (Berkeley[31])

Aussi on les proscira purement et simplement du champ de la vraie science et se résoudra à s'en tenir strictement à ce qui est intuitionnable et/ou saisissable par nos organes sensoriels.

---

[29] *Système de Logique déductive et inductive* Livre II. chaps. V. § 1 et VI. § 2 ; cf. égal. H. von Helmholtz, *Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen* in *Schriften zur Erkenntnistheorie*, Berlin 1921

[30] *E.E.H.* Sec. XII. 1ère partie p. 210 ; vide Berkeley, *P.C.H.* 1ère partie § 122 p. 325

[31] *Cahier de notes* 423. ; vide égal. Hume, *T.N.H.* I. 2è partie Sec. I. p. 93

En délimitant notre savoir, on se débarrasserait du même coup des questions encombrantes et indécidables, pour s'en tenir strictement à ce qu'il nous est possible, à nous autres hommes, d'appréhender ou de connaître.

La véritable mathématique releverait davantage de "l'évidence intuitive" (certitude sensible) que de l'"évidence logique" (raisonnement), malgré tout l'appareillage démonstratif dont l'ont paré ses représentants depuis Euclide et qui n'a contribué qu'à sa dénaturation profonde. Point n'est besoin de longues et laborieuses déductions –jamais vraiment concluantes au demeurant, vu leur caractère « axiomatique »-, là où " une démonstration intuitive " suffirait. A exiger plus, obtiendrait en fait moins, sans compter le ridicule d'une démarche entièrement artificielle, en lieu et place de la plus naturelle des procédures.

" Nous ne pouvons nous empêcher de trouver leur méthode [celle des mathématiciens depuis Euclide] étrange, je dirai même absurde. ... C'est absolument à nos yeux, comme si quelqu'un se coupait les deux jambes pour marcher avec des béquilles " (Schopenhauer[32])

Corrélativement on substituera à une chimérique/vaine mathématique pure, une mathématique appliquée ou « utile », plus conforme, semble-t-il, aux origines mêmes de cette connaissance.

2. Utilitarisme

Quoi qu'en aient les admirateurs ou partisans d'une matière ou science pure, celle-ci ne saurait outrepasser réellement les limites de notre condition d'êtres *d'abord* vivants et/ou pratiques, *puis* seulement pensants / théoriques. Elle serait fille du besoin ou nécessité vitale. Les théorèmes (démonstrations), dont elle s'enorgueillit, ne constitueraient qu'une extension (généralisation), fût-elle indéfinie, des propriétés des corps (solides) environnants, constatables (percevables) dans la vie de tous les jours.

" La spéculation est un luxe, tandis que l'action est une nécessité. ... Nous naissons artisans comme nous naissons géomètres, et même nous ne sommes géomètres que parce que nous sommes artisans. (...) C'est de l'extension d'une certaine géométrie, suggérée par les propriétés générales et immédiatement aperçues des solides, que la logique naturelle est sortie. C'est de cette logique naturelle, à son tour, qu'est sortie la géométrie scientifique, qui étend indéfiniment la connaissance des propriétés extérieures des solides." (Bergson[33])

Comme toutes les sciences, et sans nulle prérogative, la *Mathesis* devrait son existence à des préoccupations utilitaires et serait redevable de ses vérités premières à l'expérience. En quoi elle s'avérerait finalement, à l'instar de toutes les autres, une science *empirique*. Il faudrait donc cesser de lui attribuer un statut –platonicien, cartésien ou husserlien- d'exception ou hors norme qui veut y voir, eu égard à son abstraction, " l'honneur de l'esprit humain " (Jacobi[34]) ; et se résoudre à la considérer plus modestement comme une connaissance concrète parmi tant. En la déboulonnant de son piédestal, on la ferait redescendre du Ciel sur la Terre et résoudrait ainsi, en le niant, le « mystère » qu'elle suscite aux yeux des épistémologues, soucieux de comprendre la genèse d'une discipline apparemment si éthérée.

On ne cherchera pas la justification de la Science et/ou Vérité en elle-même mais plutôt dans une " volonté absolue de la vérité ... la foi en une valeur *métaphysique*, en une valeur *par excellence de la vérité* " (Nietzsche), qui en compose le présupposé fondamental.

" Il n'y a, en bonne logique, pas de science « inconditionnelle » ; la seule pensée d'une telle science est inconcevable, paralogique : une science suppose nécessairement une philosophe, une « foi » préalable qui lui donne une direction, un sens, une limite, une méthode, un *droit* à l'existence. ... La science elle-même a *besoin* désormais d'une justification (ce qui ne veut même pas dire qu'il en existe une pour elle). ... La volonté de vérité a besoin d'une critique –définissons ainsi notre propre tâche-, il faut essayer une bonne fois de *mettre en question* la valeur de la vérité ... " (idem).

---

32 *M.V.R.* L. 1er 15. p. 106

33 *L'évolution créatrice* chap. 1er p. 532 - chap. II. p. 631

34 vide supra Introduction note 27

Loin de s'auto-légitimer, ou de se suffire à soi, la Connaissance se base sur une *croyance*. Or cette " *croyance métaphysique* sur quoi repose notre foi en la science " (idem[35]) ne peut à son tour, sauf à demeurer inintelligible, qu'être fondée sur le besoin de s'orienter dans la vie.

L'histoire ne corroborerait-elle pas ce point de vue ? Si l'on en croit Hérodote, ce sont des motifs financiers qui auraient donné naissance à la géométrie en Égypte, où le roi Sésostris "partagea la terre entre tous les Égyptiens par lots carrés d'égale superficie", s'assurant par-là même des revenus, sous forme d'"une redevance annuelle" proportionnnelle à la possession de chacun, et la capacité d'en "mesurer la diminution" lors des pertes dues aux crues du Nil. Pareillement la météorologie nous viendrait de Babylone, où elle aurait probablement répondu à des raisons agricoles ou économiques.

" Voilà, je pense, l'origine de la géométrie, qui passa plus tard en Grèce ; mais le cadran solaire, le gnômon et la division du jour ne douze parties nous sont venues des Babyloniens."[36]

En la modifiant légèrement, mais sans toucher à son principe même, Marx reprendra à son compte cette interprétation, tout en lui ajoutant un volet politique ou social.

" C'est la nécessité de calculer les périodes des débordements du Nil qui a créé l'astronomie égyptienne et, en même temps, la domination de la caste sacerdotale à titre de directrice de l'agriculture." (Marx[37])

Loin de toute pureté, la Science en général participerait d'une activité très / trop (?) humaine.

Une telle vision intuitionniste ou empirico-pragmatique de la mathématique suffit-elle cependant à résoudre la question de son origine et/ou validité ? Il est permis d'en douter et de déceler dans sa prétendue « évidence » une simplification, pour ne pas dire un simplisme, peu compatible avec la « complexité » / difficulté ou rigueur de l'« objet » ici en cause.

B. Critique

2.

Remarquons d'emblée que le commencement utilitaire dans l'émergence du mathématique que note cette théorie tourne dans un véritable cercle vicieux, manifeste tant chez Hérodote que chez Marx. Tous deux présupposent en effet ce qui demande à être expliqué. Car s'ils invoquent la nécessité d'une « mesure » ou d'un « calcul », force est de souligner que, ce faisant, ils supposent, la possibilité même de ceux-ci, soit leur idée déjà présente dans l'esprit. En l'absence de cette dernière, on voit mal comment un besoin, quelqu'il soit, engendrerait de telles notions : une chose étant d'éprouver un besoin, une autre de pouvoir l'assouvir réellement. Pour passer de l'une à l'autre, l'existence d'un moyen approprié s'avère indispensable. Les catégories mathématiques, qu'ils s'imaginent avoir dérivées, précèdent en vérité les raisons évoquées, et forment des motifs premiers, toujours déjà « donnés ». Dans le cas d'Hérodote, cette pétition de principe est d'autant plus patente qu'il admet un premier "partage" *géométrique* des terres déjà effectué par le roi.

D'ailleurs le déterminisme « matériel » – économique ou financier- auquel recourent nos deux auteurs, n'a en fait rien de matériel, puisqu'il renvoie à de stricts déterminations ou institutions humaines -l'« économie » et/ou la « politique »- qui ne trouvent pas d'équivalent dans la nature ou la vie et qui sont elles-mêmes déjà traversées par des significations mathématiques ou rationnelles -« valeur », « égalité », « équité » etc.- dont ne rencontre pas l'ombre d'une trace dans l'ordre naturel. C'est donc de manière totalement illusoire que l'on prétend comprendre ou déduire la mathématique à partir de la nécessité pratique. Et si celle-ci

---

35 *G.M.* 3è Dissert. 24 pp. 229-231 ; cf. égal. *G.S.* Livre V 344 pp. 288-289 et *P.D.B.M.* 7è partie 230

36 *Histoire* II. 109. p. 183 ; vide égal. Proclus, *Commentaire sur le 1er Livre des Éléments d'Euclide* 65. 3.

37 *Le Capital*, L. 1er 5ème Sec. chap. XVI. p. 187 n. 2.

peut donner à certains l'impression d''abriter celle-là, c'est uniquement suite à la projection qu'ils opèrent de la première dans la seconde.

Pris dans l'étau des contraintes naturelles ou utilitaires, nul sujet n'eût songé à élaborer des concepts mathématiques, obnubilé qu'il serait par l'urgence du besoin. Seul un esprit libéré des impératifs pratiques, et partant disposant de « losir » peut s'autoriser le « luxe » de vouloir calculer ou mesurer, c'est-à-dire de penser droitement ou rigoureusement, comme il ressort de l'exemple égyptien, autrement et mieux interprété cette fois :
"Aussi l'Égypte a-t-elle été le berceau des arts mathématiques, car on y laissait de grands loisirs à la caste sacerdotale." (Aristote)
Tant que règne le souci biologique ou naturel, la pensée ne peut prendre son essor et s'adonner pleinement au désir de "savoir" ou à "l'étonnement", soit " aux spéculations philosophiques" ou théorétiques, dans lesquelles s'enracinent les problèmes, questions ou raisonnements authentiquement mathématiques, d'après des Grecs illustres :
" la Mathématque est une science théorétique " (idem[38]).
" la géométrie ou ... quelque autre philosophie "(Platon[39]).

Et ce qui vaut pour les Égyptiens, vaut davantage pour les Grecs qui n'ont jamais considéré la Science comme un simple exercice fonctionnel qu'il importerait de pratiquer en vue de quelconques applications ou résultats, mais bien comme une activité autonome / indépendante de tout bénéfice technique. A preuve leurs travaux, absolument inutiles à l'époque, sur les sections coniques par exemple, menés hors de toute préoccupation économique ou matérielle. Ils eussent du reste écarté voire méprisé la question de l'utilité des mathématiques, la jugeant impropre et inadéquate à cette science.
" C'est une véritable joie que de voir le zèle avec lequel les anciens géomètres étudiaient les propriétés des lignes de ce genre [les section coniques], sans se laisser égarer par la question des esprits bornés: à quoi donc pourrait servir cette connaissance? Ainsi ils étudiaient les propriétés de la parabole, sans connaître la loi de la pesanteur terrestre ... " (Kant)
En refusant de suivre leur exemple, on se priverait et d'importants théorèmes et des avantages qu'ils ont fini par induire, telle l'invention, vingt siècles plus tard, du sextant qui, en permettant aux marins de se localiser plus précisément, via le calcul de la latitude, a sauvé bien de vies. On perdrait ainsi sur les deux tableaux à la fois.

Marque d'un entendement borné, la perspective pragmatique ne réflechit nullement l'essence véritable de la science en général et de la mathématique en particulier dont la justification ne relève pas de l'utilité mais bien de la vérité. Or la légitimité du vrai ne réside pas dans son usage *externe*, mais exclusivement dans sa « cohérence » *interne*, à l'aune de laquelle se mesure tout énoncé scientifique et à laquelle nul humain digne de ce nom ne saurait être insensible, puisqu'elle le réflechit lui-même, en sa dimension d'être *intelligent*.
" C'est par conséquent une objection aussi mal avisée qu'injuste que les esprits superficiels adressent aux grands hommes qui consacrent aux sciences des soins laborieux lorsqu'ils viennent à demander : *à quoi cela sert-il ?* On ne doit en aucun cas poser une telle question quand on prétend s'occuper de science. A supposer qu'une science ne puisse apporter d'explication que sur un quelconque objet possible, de ce seul fait son utilité serait déjà suffisante. Toute connaissance logiquement parfaite a toujours quelque utilité possible : même si elle *nous* échappe jusqu'à présent, il se peut que la postérité la découvre. Si en cultivant les sciences on n'avait jamais mesuré l'utilité qu'au profit matériel qu'on pourrait retirer, nous n'aurions pas l'arithmétique et la géometrie. Aussi bien notre intelligence est ainsi conformée qu'elle trouve satisfaction dans la simple connaissance, et même une satisfaction plus grande que dans l'utilité qui en résulte. Platon l'avait déjà remarqué. L'homme y prend conscience de sa valeur propre ; il a la sensation de ce qui se nomme : avoir l'intelligence. Les homme qui ne sentent pas cela doivent envier les bêtes. La valeur *intrinsèque* que les connaissances tiennent de leur perfection logique est incomparable avec la valeur *extrinsèque* qu'elles tirent de leur application." (idem[40])

---

[38] *Méta*. A. 1. 981 b 24 ; 980 a 21 et 2. 982 b 12 ; K. 7. 1064 a 32 (cf. égal. E. 1. 1026 7
[39] *Théétète* 143 d ; cf. égal. *Rép*. VII. 527 ab ; 529 e et *Épinomis* 990d
[40] *C.F.J.* § 62 pp. 183-184 (vide égal. Condorcet in A. Comte; *C.P.P.* 2ème L. p. 36 et R. K. Merton, *S.C.* in *Socio. au XXè siècle* PUF I. p. 419) et *Logique* Introd. VI. A. p. 45

Quelque soit le lien de l'activité mathématicienne avec la pratique utilitaire ou " la praxis " ordinaire des hommes –lien la plupart du temps inverse de celui postulé par les pragmatistes, la seconde n'étant qu'" une application pratique des lois " de la première-, il est exclu de l'asservir à la finalité de celle-là, dès lors qu'elle vise un tout autre objectif que "l'utilité pratique", à savoir la formation des " idéalités géométriques ". Or, pour le répéter une dernière fois, si celles-ci se préfigurent éventuellement dans " la vie pratique ", sous la forme de procédés techniques approximatifs –" Ainsi la restauration des plans et leur perfectionnement (le polissage) jouent-ils toujours leur rôle dans la praxis. Il en va de même pour l'intention d'équité dans le partage "-, c'est uniquement à titre de " supports d'une praxis d'un genre nouveau " qui présupposent en vérité des " « objectivités idéales » " toujours déjà anticipées.
" Il est d'avance évident que ce genre nouveau sera un produit qui naît d'un acte spirituel d'idéalisation, d'un savoir « pur » qui a son matériel dans les pré-données universelles déjà décrites et crée à partir d'eux des « objectivités idéales »." (Husserl[41])
A la rigueur on baptisera ces " supports " de causes occasionnelles des " idéalités ", réservant l'expression de causes nécessaires –" la réalité de la cause " (Platon)- aux " « objectivités » idéales ", les seules à mériter pleinement le qualificatif de « mathématiques » ou pures.

Et à ceux qui, comme Nietzsche, ne croient pas à l'objectivité ou la vérité pure du savoir, y suspectant une croyance / foi *métaphysique*, on leur rétorquera, ironiquement mais justement, que leur propre position n'est qu'une posture croyante, puisqu'ils prêtent foi à la *vérité* de leur thèse, allant jusqu'à la tenir pour vérité définitive : " une bonne fois de *mettre en question* ". Ils retrouvent ainsi " la thèse du savantissime Protagoras "[42] qui, pareillement, n'évitait pas le ridicule de soutenir, dans un ouvrage intitulé *La Vérité*, l'idée que la connaissance est *opinion*. Or, à tout prendre, entre deux croyances ou opinions, mieux vaut choisir la plus cohérente. Et la leur s'avérant foncièrement *absurde*, car elle s'auto-détruit, on lui préférera légitimement la foi des hommes de *science* qui présente l'avantage de la conséquence, puisque eux, ne trichant pas sur celle-là, affirment et font la même chose.

Au total, ce qui est vain donc, ce n'est point de chercher des entités mathématiques abstraites / pures, tout au contraire, c'est d'attribuer à ces dernières un corrélat ou référent «réel»-sensible, alors que, de toute « évidence », les vérités de la mathématique résident en nous et non dans un quelconque dehors. Sa pratique et ses « objets » obéissent à d'autres lois que les règles de notre vie quotidienne, ne serait-ce que parce que les objets mathématiques ne sont pas, à proprement parler des objets, intutionnables par nos sens, et requièrent en conséquence une législation propre.

1.

Pour comprendre un tant soit peu l'essence du mathématique, il convient de distinguer soigneusement les choses naturelles ou artificielles, peu importe, reçues de la perception ou de l'imagination, et les catégories mathématiques, objets de l'intellection ou du raisonnement. Pour s'en convaincre, il suffit d'« observer » la béance qui les sépare. Alors que les premières souffrent d'une approximation ou inexactitude, progressivement mais jamais complètement résorbable –on peut toujours « arrondir » une configuration naturelle, sans pour autant pouvoir la transformer en un cercle « exact »-, les secondes jouissent d'emblée d'une forme « parfaite », conformément à leur règle de construction.
" Bien qu'il soit plus conforme à la nature qu'un disque à peu près rond, pris d'un tronc d'arbre ait été arrondi peu à peu par l'élimination des petits fragments irréguliers, faisant saillie, le géomètre ne procède pourtant pas ainsi, mais, avec le compas ou de sa main nue, il construit *aussitôt* un cercle *abstrait exact*." (Hegel)

---

41 *O.G.* in *C.S.E.P.T.* App. III au § 9 a pp. 417 et 424 - 425
42 cf. Platon, *Théétète* 160 d et 161 c ; vide Cours Introduction g^ale 3. A. pp. 25 et 30

Car cette « perfection » ne s'obtient point au fil du temps, moyennant un ajustement graduel de mesures empiriques, soit via la méthode des essais et des erreurs, auquel cas elle ne s'obtiendrait pas davantage que pour les configurations matérielles.
" Il est évident en soi que, dans la science mathématique, il ne peut aucunement être question d'une pareille précision empirique ; que la mensuration mathématique à l'aide du calcul de constructions et de preuves géométriques n'a rien à faire avec l'arpentage, avec la mensuration de lignes, de figures, etc., empiriques." (idem)
Partant l'exactitude ou la précision mathématique n'a rien à voir la mesure ou le tâtonnement intuitif, mais tout avec la rigueur de la pensée.

Aussi on opposera une fin de non-recevoir à ceux qui persistent à créditer la géométrie d'une origine empirique et font reposer " ses démonstrations … sur l'intuition ", thèse dont l'acceptation conduirait à la ruine de la scientificité de la mathématique.
" A cette platitude on peut opposer un argument non moins trivial, à savoir que l'intuition ne peut jamais donner une science, mais que toute science est fille *de la pensée*." (idem[43])
Cette démarche relève au bout du compte d'une solution de facilité, puisqu'elle autorise ses tenants à se dispenser d'une véritable *déduction*.
" On fait trop facilement appel à l'intuition intérieure quand on ne peut pas offrir un autre fondement." (Frege[44])
Pourtant l'existence indéniable de la science géométrique et de ses énoncés (*théorèmes*) justes ou vérifiables, oblige à lui assigner une toute autre origine, compatible avec son arrachement initial de toute donnée sensible, soit avec son « idéalité », unique source envisageable d'une vérité *idéale*, c'est-à-dire rationnelle.

Faute d'une telle idéalité première, la mathématique se serait rapidement fourvoyée dans une simple description, forcément imprécise et incertaine, l'intuition des choses en tant que telles n'étant porteuse d'aucune valeur mathématique.
" Ces simples concepts [dentelé, entaillé, en forme de lentille, d'ombelle, etc.] sont *inexacts par essence et non par hasard ; et pour cette raison* également ils sont non-mathématiques.
Les concepts géométriques sont des *concepts « idéaux »* ; ils expriment quelque chose qu'on ne peut «voir» ; leur «origine», et donc aussi leur contenu diffèrent essentiellement de ceux des *concepts descriptifs* en tant que concepts exprimant des essences issues sans intermédiaire de la simple intuition, et nullement des essences « idéales ». Les concepts exacts ont pour corrélat des essences qui ont le caractère *« d'idées » au sens kantien* du mot." (Husserl[45])
Prise en elle-même la nature est *a-mathématique*. L'advenue de la *mathesis* suppose la présence d'un esprit apte à produire des déterminations / des « instruments » mathématiques.

Force est de l'« admettre », il n'y a pas de milieu commun entre les figures, fussent-elles les plus élémentaires, « dé-finies » par le géomètre et les formes, très floues que nous percevons. On ne saurait donc trouver de terrain d'entente, de passage ou de translation entre elles. Le mathématicien commence là où finit l'observateur, à l'abandon ou l'abstraction du visible.
" Les lignes sensibles ne sont [pas] les lignes dont parle le géomètre (car les sens ne nous donnent ni ligne droite, ni ligne courbe, conforme à la définition) (...) Nous voyons le mathématicien faire porter son étude sur des abstractions; il considère, en effet son objet en faisant abstraction de tous ses caractères sensibles " (Aristote[46]).

Comment du reste *imagerait*/imaginerait ou intuitionnerait-on des concepts plus complexes encore, les capacités de toute image n'excédant pas un nombre fini de traits / de dimensions ? S'il est très possible de concevoir " un chiliogone " (figure de mille côtés), il est impossible de s'en donner une image actuelle ou réelle, comme c'est éventuellement le cas pour le triangle.
" Par exemple, lorsque j'imagine un triangle, je ne le conçois pas seulement comme une figure composée et comprise de trois lignes, mais outre cela je considère ces trois lignes comme présentes par la force et l'application intérieure de mon esprit ; et c'est proprement ce que j'appelle imaginer. Que si je veux penser à un chiliogone,

---

43 *Rap. à Niethammer* II in *T.P.* p. 144 ; (cf. égal. *E.* II § 256 R.) ; *S.L.* I. 2è sec. chap. II c) Note 1. pp. 286-287 et III 3è sec. chap. II A. b) 3. 2. p. 535

44 *F.A.* 1. 12. p. 140

45 *I.D.P.* I. 3è Sec. chap. 1er § 75 pp. 236 – 237 ; cf. égal. 1ère Sec. chap. 1er § 7 p. 31

46 *Méta*. B. 2. 998a 1 - K. 3. 1061a 30 ; cf. égal. Fichte, *W.L.* 1804 II p. 96 (GA II. 8. p. 144)

je le conçois bien à la vérité que c'est une figure composée de mille côtés, aussi facilement que je conçois qu'un triangle est une figure composée de trois côtés seulement ; mais je ne puis pas imaginer les mille côtés d'un chiliogone, comme je fais les trois d'un triangle, ni, pour ainsi dire, les regarder comme présents avec les yeux de mon esprit." (Descartes[47])

Et à quelle universalité (vérité) pourrait-on prétendre avec la seule aide du percevoir, forcément particulier : nos façons de voir ne diffèrent-elles pas d'un individu à l'autre, quand ce n'est pas d'un moment à l'autre ? Dans l'hypothèse empiriste, c'en serait donc fini de la pertinence / validité des leçons mathématiques. Les définitions par quoi elles commencent se verraient ébranlées, nulle n'étant à même de se réclamer de l'expérience, dès lors qu'elles font toutes appel à la notion d'*infini* -sans laquelle ni l'arithmétique (suite *indéfinie* des nombres) ni la géométrie (ligne droite prolongeable *à l'infini*) n'auraient le moindre sens-, et que l'intuition ne nous confronte qu'à du fini.

Si l'on entend « sauver » la mathématique ou, plus simplement, tenir compte de son existence de fait, on se détournera de la « monstration » sensible, pour emprunter le chemin de " la démonstration ...[soit du] discours intérieur de l'âme " (Aristote) et/ou de la pensée :

" En effet, les yeux de l'esprit, par lesquels il [l'esprit] voit et observe les choses, sont les démonstrations elles-mêmes."
(Spinoza) [48]

Seule une telle « vision » de la mathématique permet de résoudre le " problème, que le savant Monsieur Molyneux ... a communiqué à l'illustre Monsieur Locke " (Leibniz) et, au-delà, de comprendre qu'un aveugle de naissance puisse faire de la géométrie. Il lui suffit de se laisser guider "par les principes de la raison", soit de pratiquer "une géométrie naturelle [rationnelle]", en se fiant à ses idées et non à ses images, tactiles en l'occurence.

" Ce qui fait encore voir combien il faut distinguer *les images des idées exactes*, qui consistent dans les définitions." (idem)

Il appartient à cette dernière de produire, légitimer et vérifier le bien fondé des catégories récusées par l'intuitionnisme, à commencer par celle de l'infini ; et c'est ce qu'elle ne manque pas de faire en recourant au principe de l'invariance, " de la similitude ou de la même raison ".

" Prenons une ligne droite et prolongeons-la, en sorte qu'elle soit double de la première. Or, il est clair que la seconde, étant parfaitement semblable à la première, peut être doublée de même, pour avoir la troisième qui est encore semblable aux précédentes ; et la même raison ayant toujours lieu, il n'est jamais possible qu'on soit arrêté ; ainsi la ligne peut être prolongée à l'infini, de sorte que la considération de l'infini vient de celle de la similitude ou de la même raison, et son origine est la même avec celle des vérités universelles et nécessaires. "
(idem[49])

Sans l'idée de l'infini l'arithmétique la plus élémentaire, celle des entiers naturels, ne pourrait au demeurant établir la moindre vérité générale.

" l'idée de l'infini mathématique joue déjà [dans l'arithmétique des entiers] un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général." (Poincaré[50])

Par-delà, le raisonnement donnera naissance à des concepts, entièrement inintuitionnables et pourtant absolument justes / légitimes, tels les concepts de figure circonscrite par deux lignes droites ou d'espace à plus de trois dimensions, notions envisagées, sinon admises par Kant :

" Il n'y a point de contradiction dans le concept d'une figure renfermée entre deux lignes droites, ... l'impossibilité ne tient pas au concept en lui-même, mais à la construction de ce concept dans l'espace. (...) Une science de toutes les espèces possibles d'espaces serait sans aucun doute la plus haute géométrie que pût entreprendre une intelligence finie. ... Mais la 4è dimension est une fiction pure (*Unding*)".

Le progrès de la mathématique, avec l'émergence des géométries non-euclidiennes ou celle des espaces à *n* dimensions, se chargera de leur donner consistance ou « réalité ».

---

47 *Méd*. 6è p. 318

48 Aristote, *Anal. Postr*. I. 10. 76 b 25 et Spinoza, *Éthique* 5ème partie Prop. XXIII Scolie p. 582

49 *N.E.* II. IX. § 9 p. 113-114 (vide égal. Diderot, *Lettre sur les aveugles*) et XVII. § 3 p. 133

50 *S.H.* 1ère partie chap. I. V p. 40

Pour avoir clairement compris le rôle fondateur ou *princeps* de la Raison dans l'élaboration des " éléments les plus simples des démonstrations géométriques ", soit des premiers théorèmes, qui portent d'ailleurs leur nom, les Grecs, *Thalès*[51] ou *Pythagore* " qui transforma la philosophie géométrique " (Proclus[52]), furent bien à *L'Origine de la Géométrie* (Husserl) ou, plus généralement, de la *Mathesis* pure ; tout comme c'est l'un d'entre eux, Euclide, qui en épela l'Alphabet ou les Lettres (*Stoicheia*), formalisant ainsi ses *Éléments* ou Fondements. Quant à leurs devanciers, les " Égyptiens ... [ou les] Chinois " ou encore les Babyloniens, ils s'étaient arrêtés à " la géométrie pratique ... [ou] empirique " (Leibniz[53]) ou à des procédés de calcul, fort louables et utiles certes pour la vie économique, juridique et sociale en général, mais d'aucune, ou quasi, valeur théorique digne de figurer dans un Manuel de Mathématique. Ils ne nous ont laissé aucun théorème en héritage et toutes leurs « découvertes » trouvent place dans la (pré) histoire de cette science et nullement dans sa présentation systématique.

Ce faisant les Hellènes n'ont pas « créé » la mathématique, pas davantage que les Hébreux n'ont inventé le monothéisme, mais, et c'est déjà énorme, ils l'ont « dé-couverte », portée à la conscience ex-plicite / formelle. Ils nous ont en définitive rappelé la vérité élémentaire, et cependant trop souvent oubliée, que le sol ferme de la Mathématique ne se confond pas avec l'*Empirie* ou la *Terre*, sur laquelle ne gît qu'un succédané des *mathemata* -lisible du reste seulement depuis l'instauration par l'Homme de cette discipline-, mais avec l'Empyrée de la *Pensée*, site véritable de l'animal *pensant* que nous sommes de tout temps :
" car nous sommes une plante, non point terrestre, mais céleste "(idem[54]).
Ainsi on relevera aisément le défi empiriste /humien –" Qu'on essaie de concevoir un triangle en général "-, en le renvoyant à n'importe quel *Livre* de *Géométrie* ou de *Mathématique* où il trouvera aisément une définition et partant une représentation conceptuelle *du* triangle, antécédemment même à celle de *tel* triangle.

Bref, et pour résumer notre trop longue critique de l'intuitionnisme, on répétera la formule lapidaire de l'élève de Platon :
" les notions mathématiques sont des produits de l'abstraction " (Aristote).
Les Mathématiques n'étudient pas des choses concrètes mais des objets abstraits ou purs. Elles n'ont pas affaire au contenu (empirique) des êtres, mais uniquement à leurs " formes ".
" En effet, les Mathématiques s'occupent seulement des formes : elles ne portent pas sur un substrat puisque, même si les propriétés géométriques sont celles d'un substrat, ce n'est pas du moins en tant qu'appartenant au substrat qu'elles les démontrent." (idem[55])
D'où leur cohérence, rigueur ou vérité, celle-ci se dégageant directement ou immédiatement de leur abstraction ou pureté.

Parce qu'elles ne se mêlent pas à/de la « réalité » sensible des choses, toujours aléatoire ou variable, les notions et/ou démonstration mathématique sont « libres ».
" Il faut remarquer que le nombre n'est rien de fixe et d'existant realiter dans les choses mêmes. C'est une production de l'esprit qui considère soit une idée prise en elle-même, soit une combinaison d'idées auxquelles il donne un nom, et pour ce faire les regarde comme une unité. Selon que l'esprit combine ses idées de manière variable, le nombre varie également, qui n'est qu'une collection d'unités. Une fenêtre = 1, une maison dans laquelle il y a beaucoup de fenêtres = 1, et plusieurs maisons font une ville." (Berkeley[56])

---

[51] *C.R.P.* Log. transc. L. 2è chap. II. 3è sec. IV. p. 245 - *P.V.E.F.V.* (1747) §§ 10 et 9 in AKB I, pp. 24 et 13 (cf. égal. *C.R.P.* 1ère éd. Esth. transc. p. 88 a. et *D. 1770* Sec. III. § 15 D. p. 56) et *C.R.P.* Préf. 2nde éd. p. 39 ; vide égal. Husserl, *O.G.* p. 418
[52] *C.P.L.É.E.* 15. 19.
[53] *N.E.* L. IV. chap. XII. p. 400 ; cf. égal. chap. II. p. 326 ; vide égal. Cours Introd. gale 1. p. 5
[54] *Phédon* 98 e - 99 b (cf. égal. *Timée* 46c e ; 68 e; *Le Politique* 281 d et *Lois* X 897 ab) et *Timée* 90 a
[55] *Traité du Ciel* III. 1. 299 a 16 et *Org., Les 2nds Analytiques* I. 13. 79 a 8-10 ; cf. égal. *Physique* II. 2. 193 b 31 et *Méta*. E. 1. 1026 a 9 et 26 ; K. 3. 1061 a 28 - 1061 b 6 ; 7. 1064 b 7-14 et Λ. 8. 1073 b 7
[56] in Frege, *F.A.* 2. 25. p. 152 ; vide Baumann, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik*

Obligées par les réquisits de l'esprit, elles accèdent du coup à l'« évidence » ou à une vérité, quand bien même, nous le vérifierons ultérieurement, elles ne témoigneraient pas encore adéquatement de la Vérité, qui est du ressort de la Philosophie, dans la mesure où celle-ci ne se limite pas aux seules vérités « comptables » et /ou « figurables ».

Tous les empiristes le concèdent in fine, fût-ce à leur corps défendant et au risque d'une totale inconséquence avec leurs propres prémisses.

" Même s'il n'y avait jamais eu de cercle ou de triangle dans la nature, les vérités démontrées par Euclide conserveraient pour toujours leur certitude et leur évidence." (Hume[57])

Mais pour nous celle-ci veut dire l'incontournabilité de la thèse rationaliste, la seule compatible avec la « certitude », véritable *incipit* donc de la *Mathesis*, qu'il serait temps maintenant d'aborder pour elle-même.

II. – *Mathesis*

A repartir du seul acquis dont nous puissions pour l'instant nous targuer, il appert que le mathématique correspond à une « dimension » autre que le sensible : loin de refléter celui-ci, il en transgresse les limites mouvantes vers une réalité plus essentielle et/ou « réelle », comme il ressort de l'exemple arithmétique. Rien d'étonnant que ce chapitre de la mathématique intéresse vivement le Philosophe et lui apparaisse comme un auxiliaire voire une propédeutique à sa propre discipline.

" Et, de la sorte, un des moyens d'attirer l'âme, de la détourner vers la contemplation du réel, ce doit être l'étude qui a l'unité pour objet." (Platon)

" Ce qu'il y a de divin [spirituel] dans cette discipline " n'est-il pas la marque ou le signe de notre destin : " devenir un être divin ", soit, pour l'exprime plus prosaïquement, être « habité » par " la pure pensée " (idem[58]) ?

Aussi il importe de repréciser ou souligner, avec Platon, la ligne de démarcation entre le sensible ou l'intuitionnable et l'intelligible, telle qu'elle se manifeste dans le « calcul », chapitre, semble-t-il, plus pur encore de la Mathématique que la géométrie, n'étant « asservi », contrairement, apparemment, à cette dernière, à aucune figuration et/ou spatialisation.

" l'Arithmétique, par exemple, est plus exacte que la Géométrie." (Aristote[59])

S'en déduiront, comme d'elles-mêmes, les caractéristiques ou propriétés fondamentales de la *Mathesis*, tant en ses « objets » qu'en sa « méthode ».

1. Idée contre Intuition

Si l'on veut avoir la moindre chance de saisir l'essence des mathématiques, voyons donc avec l'auteur de la *République*[60] les ou la différence(s) voire l'opposition entre l'arithmétique pure (scientifique) et l'arithmétique empirique (simple calcul ordinaire). Nous partirons de la plus obvie d'entre elles, la nature appliquée /technique, pratiquée " dans un esprit vulgaire " par les commerçants ou d'autres, de celle-ci, par contraste avec la visée strictement épistémologique ou intellectuelle de celle-là -" la science du calcul ... [ayant pour but de] contempler la nature des nombres ".

" Et en vérité, repris-je, étant donné que c'est l'étude du calcul qui était en question, je me rends compte, maintenant à quel point de raffinement elle sert, de multiples façons, à notre dessein, quand on la pratique pour apprendre à connaître, mais non pour vendre au détail."

---

[57] *E.E.H.* Sec. IV. 1ère partie p. 70
[58] *Rép.* VII. 524 e – 525 a ; Lois V. 747 b ; 818 c et *Épinomis* 977 a
[59] *Méta.* A. 2. 982 a 27 ; cf. égal. Org. 2nds Anal. I. 27. 87 a 33
[60] **Texte** in op. cit. VII 525c – 526a

Il en va ici comme en géométrie, où nombre, jusque dans les rangs de ses adeptes, oublient l'authentique finalité de celle-ci, à savoir la connaissance et non la pratique.

"Leur langage est, je pense, tout à fait risible et sent la servilité ; car, tenant un largage qui est celui de gens qui pratiquent une action et dont la pratique est le but, ils parlent de « carrer », de « tendre le long de », de « poser en plus de », usant partout de semblables formules, alors que, sans doute, cette étude-là est tout entière une occupation dont la connaissance est le but."

Quiconque aspire à comprendre la *véritable* mathématique, devra se tenir fermement à la première, sous peine d'en trahir la substance ou vérité.

Car si la seconde en est bien une application, par ce fait même, elle y introduit des éléments externes, sans rapport avec les notions arithmétiques en tant que telles. Alors que les nombres qu'envisage la technique calculatrice sont toujours des nombres de quelque chose – produits d'échange, matériaux de construction, révolutions des " choses d'en haut ", " consonnances " de la musique etc.- ; les nombres arithmétiques sont dépourvues de tout corrélat « réel ».

Partant il ne peut s'agir que de deux disciplines dissemblables, ou, pour le moins, de deux modalités distinctes de l'art de nombrer, l'une " qui est celle du vulgaire, et une autre, celle des gens qui s'occupent de science ".

" Mais quoi ? Entre les opérations du calcul ou de la mesure, quand on les considère dans l'art du constructeur ou dans la pratique du négoce, et, d'autre pat, les raisonnements géométriques d'un savant ou les calculs sur lesquels il s'exerce, nous faut-il dire que, de part et d'autre, c'est une seule et même chose, ou bien admettre que ce sont deux choses ?" (idem[61])

On conviendra, avec une certaine tradition, d'en nommer les objets respectivement "nombres nombrés" ou matérialisés et "nombres nombrants"[62], désincarnés ou purs, étant entendu que seuls ces derniers sont susceptibles de mener à une intellection pure /scientifique.

" Comment donc, dit-il, le sert-elle ? - En ceci précisément de quoi nous parlions tout à l'heure, qu'elle mène avec force l'âme quelque part en haut, et qu'elle l'oblige à faire porter son discours sur les nombres en tant que nombres, sans admettre d'aucune manière qu'on fasse ce discours en lui proposant des nombres pourvus d'un corps visible et tangible."

Ils correspondent d'ailleurs à ce que le mathématicien-théoricien a en vue, lorsqu'il raisonne ou effectue des opérations " sur les nombres eux-mêmes, [et] non pas cependant sur des nombres concrets "[63] –nombres de ceci ou de cela. Dans les théorèmes de l'arithmétique, il n'est jamais question que d'eux et non de substrats auxquels ils se rapporteraient.

Que signifie néanmoins au juste ce « nombre nombrant » ou le pur nombre arithmétique et comment l'obtient-on, vu qu'il ne bénéficie, de toute « évidence », d'aucune préexistence ? Nul ne saurait se prévaloir d'avoir croisé un nombre, fût-il dénommé *naturel*, dans le monde, où l'on ne rencontre que des êtres hétérogènes, choses, plantes, animaux ou hommes, mais jamais leur « nombre » : 1, 2, 3 ... ; -1, -2, -3 ... ; 1,2, 2,3, 3,4 ... ; ½, ⅔, ¾, ... √2, π, ℵ etc. Pour que surgisse ce dernier, il faut recourir à une opération « abstrayante » qui rende au préalable homogènes les êtres que l'on veut dénombrer qui sinon, faute de « point commun », ne se prêteraient pas au moindre dénombrement ou rangement sous une catégorie commune.

" Nous ne concevons en effet les choses comme existant en un certain nombre d'individus qu'après les avoir ramenés à un genre commun. Qui tient en main, par exemple, un sou et un écu, ne pense pas au nombre deux s'il ne range le sou et l'écu sous une même dénomination, celle de pièce de monnaie. Alors seulement il pourra dire qu'il a deux pièces de monnaie, l'écu et le sou étant tous deux dénotés par ce terme." (Spinoza[64])

Rien d'étonnant que le concept de nombre s'inscrive, chez Hegel, dans la Deuxième Section –" La Grandeur (Quantité) "- du Livre Premier –*" Théorie de l'Être "*- de la *Science de la*

[61] *Rép.* VII. 525 bc ; 527 ab ; 529 a ; 531 c (vide égal. Descartes, *R.D.E.* IV. p. 50) et *Philèbe* 56 d et 56 e-57 a
[62] cf. Plotin, *Ennéades* VI. 6. 34. et Malebranche, *Rép. 3è lettre d'Arnauld*
[63] *Épinomis* 990 c
[64] *Lettre L à J. Jelles* p. 1230 ; cf. égal. Descartes, *P.P.* I 59.

Logique, tout de suite après la Première Section –" Qualité ou Déterminité (*Bestimmtheit*) "-, où sont exposées les catégories de "l'Être", de "l'Être-là" et de "l'Être-pour-soi", c'est-à-dire les formes discursives grâce auxquelles nous épelons tout ce qui est, en sa détermination qualitative, et dont l'« ab-straction » ou le « dé-passement » donnera précisément le quantitatif, soit la possibilité d'une « qualification » comptable et/ ou dénombrable[65].

Le nombre arithmétique présuppose donc la mise entre parenthèses des particularités concrètes ou qualitatives des étants, autant dire la transformation en pensée du monde tel qu'il est, avec sa richesse concrète, en un univers abtrait, idéel ou *vide*, le seul où l'énumération et la quantification peuvent affirmer leur droit.

" La théorie des ensembles et la théorie des nombres cardinaux est rapportée à l'univers du vide : objet en général ou quelque chose en général, avec une généralité formelle qui laisse hors de considération, d'une manière principielle, toute détermination concrète d'objets ;" (Husserl[66])

Tous ceux qui persistent à suggérer une genèse empirique du nombre, s'enferrent dans un véritable cercle vicieux qui consiste à projeter dans la nature ce que l'on prétend en déduire, en feignant d'oublier que celle-ci ne connaît pas 1, 2, 3 etc. « êtres » ou « unités » mais seulement des étants disparates ou multiples, et même pas, nous le verrons dans un instant.

" Sans un petit grain de métaphysique, il n'est pas possible, à mon avis, de fonder une science exacte." (Cantor[67])

Redevable en rien à l'expérience, l'intuition ou de quelque autre nom que l'on veuille appeler notre rapport immédiat au monde, le nombre participe d'une idée « méta-physique », saisissable exclusivement par notre entendement.

" Ainsi le nombre est comme la figure métaphysique. (...) Est un ce que nous concevons par un acte de l'entendement " (Leibniz[68]).

Et si Descartes, un mathématicien – métaphysicien, s'il en fût, assimile, dans la 2[nde] partie des *Principes de la Philosophie*, le nombre avec les choses nombrées –*" Que la grandeur ne diffère de ce qui est grand, ni le nombre des choses nombrées, que par notre pensée."*- et déduit celui-là de la " différence " de celles-ci, c'est qu'il y conçoit toute " chose étendue " comme déjà « idéalisée » par notre esprit. En aucun cas il ne l'identifie à un étant sensible.

" De même le nombre que nous considérons en général, sans faire réflexion sur aucune chose créée, n'est point hors de notre pensée, non plus que toutes ces autres idées générales que dans l'École on comprend sous le nom d'universaux." (Descartes[69])

On pensera finalement bien le nombre pur sous la catégorie de l'unité et non sous la forme **" d'un corps visible et tangible "**, toujours sécable ou multiplicable.

" En Arithmétique, on pose que l'unité, c'est ce qui est indivisible selon la quantité ; " (Aristote[70])

Chaque nombre arithmétique, qu'il soit le « 1 », le « 2 » ou le « 3 » est un « Un » différencié / spécifique, sans quoi il manquerait d'identité et ne pourrait être qualifié d'« un » nombre : "une unité en tant qu'unité".

" Tu sais en effet, je suppose, comment les gens qui sont experts en ces matières se gaussent de qui entreprendra, par la pensée, de fractionner l'unité en tant qu'unité et lui en refusent le droit : en fais-tu de menus morceaux ? aussitôt ces gens-là multiplient ; par crainte qu'il arrive jamais à l'unité de se manifester, non pas une, mais multiplicité de parties. – Ce que tu dis là, fit-il, est on ne peut plus vrai !"

Hors cette identité, on n'intelligerait guère comment ils naîtraient vraiment, et nous serions alors en permanence victimes de l'expérience, amusante mais instructive, de "l'horloge folle", dont nous faisons parfois les frais, en d'autres occasions.

---

65 vide Hegel, *op. cit*. I. pp. 71 – 220; vide égal. Aristote, *Méta*. Λ 1. 1069 b 21

66 *L.F.L.T.* 1[ère] Sec. A) chap. II. § 24 p. 107

67

68 cit. in Frege, *F.A*. 2. 24. p. 151 et 1. 30. p. 159 ; cf. égal. *É.D.N*. 1) in *D.R*. p. 94

69 *P.P.* II. 8. p. 615 (cf. égal. I. 55. p. 596 et Leibniz, *R.I.S*. p. 24) et I. 58. p. 597

70 *Anal. Post*. I. 2. 72 a 23

" J’ai connu quelqu’un qui en s’endormant avait entendu, un jour, sonner quatre heures, et avait fait ainsi le compte : *une, une, une, une* ; et devant l’absurdité de sa conception, il s’était mis à crier : voilà l’horloge qui est folle : elle a compté quatre fois une heure." (Descartes[71])

En effet ne nous arrive-t-il pas de temps en temps, lors de décomptes importants en particulier, et la fatigue aidant, de devoir reprendre à zéro tous nos calculs dont les résultats nous apparaissent comme de mornes et monotones réitérations du même, toutes les unités se confondant alors dans notre tête les unes avec les autres ?

Car la dérivation des nombres les uns des autres par simple addition, rapprochement, "réunion par voie de mutuelle juxtaposition", ne conduit qu'à la répétition de chacun, et aucunement à un nouveau nombre. D'un « 1 » ajouté à un autre « 1 », strictement identique au premier, ne peut résulter que le même « 1 », et nullement un « 2 ».

" C"est en effet pour moi un sujet d'étonnement que, lorsqu'elles étaient, chacune, à part l'une de l'autre, chacune des deux fût deux visiblement unité et qu'alors il n'y eût pas de 2 ; et que, une fois qu'elles se sont rapprochées, il n'a fallu, paraît-il, pour faire qu'elles devinssent 2, d'autre cause que leur réunion par voie de mutuelle juxtaposition !"

Et ce qui vaut pour la somme des nombres vaut également pour leur partition, subdivision ou " fractionnement ", tout aussi inintelligible, en l'absence d'une autre cause que celle " d'un éloignement et d'une séparation ".

Seul un principe logique d'engendrement des nombres, respectueux <u>à la fois</u> de leur différence ou unité spécifique et de leur relation, est à même de rendre intelligible l'addition ou la progression des nombres, ainsi que toutes les autres opérations dont ils sont l'objet.

" A grands cris tu proclamerais en outre que, à ta connaissance, il n'y a pour chaque chose pas d'autre façon de commencer d'exister, que de participer à ce qui est en propre la réalité de ce en quoi, en chaque cas, elle participe; que, dans ces deux cas, tu ne possèdes pas d'autre cause, expliquant que 2 commence d'exister, sinon sa participation à la Dualité, et que doivent en participer aussi tous les 2 futurs ; sinon enfin la participation à l'Unité pour tout ce qui doit être unité. Mais ces fractionnements, ces adjonctions et tout ce qu'il y a encore de finasseries analogues, tu leur signifierais leur congé ; ces réponses-là, tu les abandonnerais à des gens plus savants que tu ne l'es !"[72]

C'est pourquoi ni l'unité ni la multiplicité ne sont en définitive naturelles, celle-ci étant solidaire de celle-là.

En son fameux exemple du 7 + 5 = 12, Kant accentuera la même difficulté, tout en en proposant une solution inacceptable telle quelle, puisque, par son "recours à l'intuition ... des ... doigts de la main, ou ... à celle de ... points", elle rechute, nonobstant l'idéalisme critique de son auteur, dans l'empirisme le plus plat. Il reviendra du reste sur cette solution dans une lettre à un mathématicien où il reconnaîtra la nature intellectuelle des opérations arithmétiques, à l'instar de celles de " l'algèbre ".

" La science des nombres est, indépendamment de la succession exigée par toute construction de la grandeur, une pure synthèse intellectuelle, que nous représentons dans la pensée."[73]

Que l'on s'arrête au versant unitaire du nombre ou à son versant pluriel -deux faces qu'il nous faudra ultérieurement « unir » à leur tour-, une chose est sûre : nous n'accédons pas au nombre par l'intuition mais uniquement grâce à l'intellect ou à la pensée.

" Mais, à ton avis, Glaucon, à supposer qu’on leur pose cette question : « Quelle est, extraordinaires braves gens, cette sorte de nombres que concerne votre discours, et dans lesquels réside l’unité avec la nature que vous autres, vous lui attribuez, avec cette égalité de chacune à chacune sans la plus petite différence, avec cette totale absence de parties en elle-même ? » - Que (c’est au moins mon avis) ils parlent de ces nombres qui ne sont accessibles qu’à l’intelligence, que d’aucune autre manière il n’est possible de manier."

La plus ancienne / antique des philosophies anticipe/ préfigure ainsi le cadre conceptuel de la plus moderne des doctrines mathématiques, le logicisme. Mieux qu'une interprétation parmi

---

71 *Méditations, 7èmes Objections* (P. Bourdin)

72 *Phéd.* 96 d - 97 b ; 100 e - 101 c

73 *C.R.P.* Introd. V. p. 67 (cf. Log. transc. chap. II. 3è sec. pp. 207-208) ; Méthod. transc. chap. I. 1ère sec. p. 550 et *Lettre à Schultz* 186 in *Correspondance* p. 329

d'autres de la mathématique, la vision platonicienne de cette dernière –à condition qu'elle soit elle-même correctement interprétée-, en dit *la vérité*.

En tout cas, renvoyant cette discipline à la source même de tout savoir –" l'intellection "-, elle l'intègre à l'ensemble de la connaissance humaine-divine, lui attribuant en conséquence un statut philosophique. Sans nullement confondre Mathématique et Philosophie, comme on lui en fait parfois injustement grief, le platonisme voit légitimement, dans la première le moyen "propre à parfaire la pensée philosophique", soit la voie d'accès ou le "prélude" de la seconde :
" Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre ! "[74]
" Ainsi tu vois, repris-je, que réellement il y a pour nous, mon cher, un objet d'étude qui s'impose, puisqu'en vérité il impose à l'âme de recourir à l'intellection en visant la vérité absolue ? – Il est bien certain, répondit-il, que c'est ce qu'il fait avec force."
Où apprendrions-nous sinon à raisonner purement ou rigoureusement, c'est-à-dire vraiment ?

Une fois admis que le mathématique procède entièrement ou presque, nous aurons à le vérifier, du raisonnement pur, détaillons les étapes de celui-ci, soit les catégories qui le régissent ou en réglent /structurent la « méthode », le chemin ou le parcours. Aucune science, et a fortiori la *Mathesis* (Savoir), ne saurait en effet s'obtenir d'emblée ou immédiatement.

2. <u>Les Catégories mathématiques</u>

Ouvrons un *Manuel* ou *Traité de mathématique*, -pourquoi pas le premier d'entre eux, les *Éléments* d'Euclide-, et qu'observons-nous ? Il débute par des *Définitions*. *De quoi* et *comment* parlerait-il d'ailleurs au juste, en l'absence d'une claire détermination première de ses objets ? Penchons-nous tout d'abord sur celles-ci –ce qui revient à définir les définitions elles-mêmes-, pour y déceler la marque originaire de l'idéalité ou rationalité mathématique, à mille lieues d'une quelconque saisie empirique / physique de choses mondaines.

A. <u>Définition</u>

Nous limiterons notre examen aux deux *Définitions* initiales du Livre I des *Éléments*, concernant les plus *élémentaires* / rudimentaires des figures géométriques, le point et la ligne. Elles se libellent : *" Le point est ce qui n'a aucune partie "* et *" Une ligne est une longueur sans largeur "*. Or, faut-il y insister, de telles figures, immatérielles ou invisibles –le moindre objet matériel et visible, fût-il minuscule, comportant toujours des parties et au moins deux, en fait trois, dimensions-, ne trouvent pas leur place dans le monde ou l'espace matériel ?
" Parler de *points spatiaux* comme s'ils constituaient l'élément positif de l'espace, est inadmissible " (Hegel[75]).
En toute rigueur, elles ne peuvent même pas être représentées, leur dessin impliquant également, de par l'épaisseur, fût-elle la plus tenue, de son trait, une partition et étendue.

On en déduira que le géomètre ne tient ses définitions ni de la nature ni de l'image. Et lorsqu'il demande de " prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie " (Euclide[76]), il est manifeste qu'il évoque une opération « en pensée », nul cadre réel ne pouvant abriter l'infini. Une présentation plus moderne de la géométrie ne fait que prendre acte et pousser jusqu'au bout l'essence pensée de ses configurations.
" <u>Pensons</u> trois sortes de *choses* que nous appellerons points, droites et plans " (Hilbert[77]).

---

[74] *Rép*. VII 527 b ; 531d et in J. Philipon, *In Arist; de An. Libr; Comment.* ; vide égal. Descartes, *R.D.E.* IV p. 49
[75] *E*. II. § 254 R.
[76] *op. cit*. I. Postulats ou Demandes 2;
[77] *F.G*. début, nous soulignons (Paris, Dunod 1971)

Certes les géomètres s'aident –pas toujours néanmoins, comme le montrent les exemples de la géométrie analytique et de la géométrie algébrique-, de la figuration ou de "figures visibles" mais leur raisonnement porte sur " les figures parfaites " dont celles-là ne sont que " des images ... [ou des] copies ". Les figures représentées tiennent lieu de projections / substituts / supports de figures idéales, c'est-à-dire de relations (intelligibles) auxquelles on n'accède que par l'intellection et non par la représentation. Autrement on s'interdirait toute connaissance objective et/ou universelle, valable dans tous les cas, vu le caractère labile de la figuration sensible. Or c'est la seule qui intéresse vraiment la géométrie.
" Car la géométrie est connaissance de ce qui toujours existe." (Platon)
Sans elle la mathématique ne mériterait pas son nom de savoir (*mathesis*).

Tout géomètre le sait parfaitement, dès lors que son art consiste à raisonner juste, même sur des figures fausses -et toutes les " figures géométriques ", fussent elles " supérieurement dessinées, avec le fini le plus parfait, par Dédale ou par tout autre sculpteur ou peintre " le sont forcément- dès lors donc qu'il traduit les dessins en idées. Et s'il n'en persiste pas moins à tracer des figures, c'est toujours en les traitant " comme des copies ", des index de " figures absolues " ou conçues. En dépit de son étymologie " ridicule ", la géo-métrie (gr. *gê* : terre et *metron* : mesure) relève sans conteste de la « dé-monstration », d'exemplaires ou de "paradigmes" intelligibles et non de la simple « monstration » ou d'exemples sensibles, jamais à la hauteur des originaux.

Elle forme assurément une question de "théorie" ou de vue philosophique / rationnelle : " la géométrie ou ... quelque autre philosophie [science théorique] " (idem[78]). Or celle-ci n'est point concernée par des êtres concrets ou " des individus " (Aristote), toujours mobiles ou particuliers et dont il est en conséquence impossible d'établir " de définition et de science ", mais porte sur des formes abstraites.
" La géométrie étudie la ligne physique en tant qu'elle n'est pas physique " (idem).
Pas davantage n'est-elle intéressée par, ou ne se limite-t-elle à, leurs simples images qui en épousent forcément les caractéristiques changeantes.
" Car ce n'est pas de la figure tracée qu'il s'agit dans le raisonnement géométrique " (idem[79]).
Pour la science géométrique le concept « prime » l'image, ce qui constitue le gage de son universalité, soit de sa transgression de la particularité des images.

Si tel n'était pas le cas, si l'idée pure, le modèle de la figure, ne précédait point logiquement sa forme tracée, et le raisonnement géométrique manquerait d'exactitude et, de surcroît, nous ne pourrions jamais connaître la moindre figuration géométrique, faute d'être capables d'identifier *ce* dont l'image est au juste l'image. Comment identifierait ou reconnaîtrait-on la représentation d'un *point*, *ligne* ou *triangle*, si l'on ne savait déjà ce que leurs notions veulent dire, id est si l'on ne disposait préalablement des idées des dites formes ?
" Ainsi, certes, nous ne pourrions jamais connaître le triangle géométrique par celui que nous voyons tracé sur le papier, si notre esprit d'ailleurs n'en avait eu l'idée." (Descartes[80])

Et puisque ces idées ou notions ne nous sont nullement données par la nature, il faut qu'elles aient été produites par notre esprit antécédemment à leur figuration qui, de toute façon et eu égard à leurs réquisits, ne peut s'incarner que dans un plan ou un espace lui-même « idéal », non dérivable de nos sens, soit *a priori*, par opposition au cadre *a posteriori* de toutes nos représentations sensibles.

---

[78] *Rép*. VI. 510 d ; 511 a ; VII. 527 ab et 529 e ; *Épinomis* 990 d et *Théétète* 143 d
[79] *Méta*. K. 1. 1059 b 26 (cf. égal. M. 10. 1086 b 5 et *Anal. Postr*. II. 13. 97 b 26) ; *Phys*. II. 2. 194 a 10 et *Méta*. N. 2. 1089 a 25 ; vide égal. Schelling, *S.I.T.* in *Essais* p. 153
[80] *5èmes Rép*. p. 503 ; cf. égal. Malebranche, *E.M.R.* VII. p. 70 et Leibniz, *N.E.* L. IV. chap. I. § 9. pp. 316-317

" Aussi personne ne saurait-il avoir *a priori* la représentation d'une couleur, ou celle d'une saveur, tandis que l'espace ne concernant que la forme pure de l'intuition et ne renfermant par conséquent aucune sensation (rien d'empirique), tous ses modes et toutes ses déterminations peuvent et doivent même être représentées *a priori*, pour donner lieu aux concepts des figures et de leurs rapports." (Kant)

Qui pourrait se targuer d'avoir senti et/ou vu l'espace, alors que celui-ci renvoie à un système de coordonnées ou dimensions strictement pensé ?

Ce qui vaut pour l'espace se transpose de lui-même à ses déterminations : les figures /formes géométriques sont des épures mentales ou des " schèmes " et non des croquis matériels.

" Le schème du triangle ne peut exister ailleurs que dans la pensée, et il signifie une règle de la synthèse de l'imagination relativement à certaines figures pures [conçues par la pensée pure] dans l'espace." (idem)

C'est cette idéalité ou *production* des objets mathématiques qui est au demeurant la condition de leur transparence intelligible.

" La raison n'aperçoit que ce qu'elle produit elle-même d'après ses propres plans " (idem[81]).

En étudiant l'espace et/ou les figures (géométriques), nous ne sommes pas confrontés à des objets externes à nous mais bien à nos propres « créatures » ou des schèmes que nous construisons nous-mêmes. La géométrie s'avère bien une science et même une science pure.

" L'espace est l'objet d'une science (synthétique), la *géométrie*, car c'est en lui comme tel que le quantum continu peut se *schématiser*, c'est-à-dire se représenter intuitivement, et c'est en lui, comme élément de la diversité indifférente où chaque partie est extérieure à l'autre, et qui est cependant continue, que le concept d'un objet s'exprime sous une forme réelle contenant plus en elle que l'essentielle détermination du concept." (Hegel)

Elle « réfléchit » autant des figures que notre propre « visage ». " Les objets géométriques ", "l'espace absolu ... [et] les formes et les figurations ", mais cela se vérifie aussi pour" les objets arithmétiques " tels " les nombres ", ne devant leur être qu'à l'esprit ou étant " posés " par lui, ne sauraient lui résister et présenter la moindre opacité.

" Aussi ne *sont*-elles [les formes et les figurations] essentiellement que ce qu'elles *doivent* être ; ... Comme les nombres reposent sur le principe de l'*Unité*, leurs combinaisons et leurs déterminations ultérieures sont, d'un bout à l'autre, posées ; " (idem[82])

La même leçon se dégage en effet des *Définitions* arithmétiques introduisant le *Septième Élément* euclidien se rapportant aux nombres. Si la première se contente, en une formulation quasi platonicienne –*"L'unité est ce selon quoi chacune des choses qui sont est appelée une."*-, de rappeler que nulle chose donnée, « réellement » ou représentativement, n'est « une » en ou d'elle-même, mais ne le devient qu'à la suite de son « unification » par *nous*, c'est-à-dire par notre esprit ; la seconde -*" Le nombre est une multitude composée de plusieurs unités."*-, précise les réquisits conceptuels de l'unité numérique, en adjoignant à la pure notion de l'unité, celle, non moins pure, de la multitude ou pluralité, sans laquelle, on ne pourrait jamais parler de nombre ou de numération, mais de simple répétition de l'identique.

Toutes deux indiquent clairement que, à l'instar des définitions géométriques, les définitions arithmétiques, ne visent aucun objet susceptible d'être représenté, mais bien de purs concepts dont sont dépourvues les images à l'état brut qui ressemblent plutôt à des kaléidoscopes sans «unité» ou «pluralité» définie, tant du moins que le sujet ne les y introduit. Et ce dernier ne peut le faire que s'il se donne au préalable les dites catégories. Seulement alors il pourra reconnaître dans un paysage ou un tableau peu importe « un » ou « plusieurs » motifs qui ne s'y trouvent en vérité que depuis son « regard », tout comme ils n'y figurent, dans le cas d'une toile, que de par la « volonté » de l'artiste (peintre). Bref la définition du nombre, telle qu'elle s'énonce chez le mathématicien, retrouve l'enseignement « idéaliste » - platonicien sur la genèse *idéale* –en existe-t-il une autre ?- des nombres.

---

[81] *C.R.P.* Esth. transc. § 3 (1ère éd.) p. 88 ; Log. transc. 1ère div. L. 2è chap. I. p. 189 et Préface 2nde éd. p. 40 ; cf. égal. *C.F.J.* § 68 p. 201

[82] *Propéd. philo*. 3è Cours 2è subdiv. § 105 p. 150 et *S.L.* II. 3è sec. chap. II. A. b) 1. p. 514

Par la suite les mathématiciens ne feront que le réaffirmer et préciser. Ainsi " l'illustre mathématicien Dedekind " (Husserl) par exemple répétera en son " livre ... profond sur les fondements de l'arithmétique [*Que sont et que doivent-être les nombres*]" (Frege)[83] :

" Les nombres sont de libres créations de l'esprit humain. ... Je tiens le concept de nombre pour totalement indépendant des représentations ou intuitions de l'espace et du temps, et ... j'y vois plutôt une émanation immédiate des pures lois de la pensée."[84]

Libres justement parce que idéales ou idéelles-platoniciennes, ajouterons nous simplement, et partant nullement arbitraires mais tenues aux normes des idées, id est aux exigences ou règles logiques ordonnant la pensée de tous.

Similairement, Frege, -bien qu'il ne cite point Platon, le passant curieusement sous silence, et ce en dépit du " tour plus philosophique " de ses propres *Fondements de l'Arithmétique*-, confirme pleinement le « platonisme », lui conférant à l'occasion, et à supposer qu'il en eût besoin, une vérification supplémentaire.

" En fait l'arithmétique n'a rien à voir avec la sensibilité. (...) L'arithmétique traite d'objets dont nous ne prenons pas connaissance comme d'un élément étranger, apporté de l'extérieur par la médiation des sens ; ces objets sont donnés immédiatement par la raison, et elle peut les pénétrer totalement, comme ce qui lui est propre."

Et de fait, après avoir admis que le nombre ne concerne en rien le sensible, il le renverra, dans la *Solution de la difficulté*, et dans la stricte continuité de la doctrine de la *République* aussi bien que de celle de " Spinoza ", à l'intelligible, soit au concept : le nombre en tant que tel ne subsume aucune chose mais uniquement un concept, le « commun » des choses.

" Donner un nombre c'est énoncer quelque chose d'un concept."

Il assurera du même coup à ce dernier une « objectivité » que nulle sensation ne saurait nous procurer, le propre "des sensations" étant d'être particulières, par contraste avec les concepts qui sont d'emblée *« ré-publicains »* ou universels.

" Les nombres sont des objets qui n'appartiennent à personne en propre, et ils sont identiques pour tous ".

Ce qui est valable pour les notions susnommées (unité, pluralité), l'est a fortiori pour celle du 0 qui demeurerait à jamais " une énigme " (Frege) pour nous, s'il fallait en attendre la vérification sensible, nul n'ayant " ni vu ni touché 0 caillou " ou quoi que ce soit d'autre, toute représentation étant forcément représentation de quelque chose et non de rien ou du « néant ».

" On ne peut se donner aucune représentation du nombre, ni comme un objet indépendant, ni comme une propriété des choses externes, parce que le nombre n'est ni un être sensible ni une propriété des choses externes. Ce qui est particulièrement clair dans le cas du nombre 0. On cherchera en vain à se représenter 0 étoiles visibles. On peut bien penser que le ciel est couvert de nuages : il n'y a rien là qui corresponde au mot « étoile » ni à 0. On ne fait qu'imaginer une situation qui pourrait donner lieu au jugement : aucune étoile n'est visible pour l'instant." (idem)

L'incapacité dans laquelle nous nous trouvons de matérialiser le 0 ne prouve en rien que nous soyons condamnés à ne point pouvoir le penser mais que sa notion excède toute image.

Et que dire de l'idée du "nombre cardinal infini ∞_1", sinon que son irreprésentabilité –quelle image pourrait « contenir » l'infini ?- n'empêche nullement sa parfaite maîtrise intellectuelle.

" De la sorte, notre nombre ∞_1 est aussi déterminé qu'un nombre cardinal fini quelconque : on peut l'identifier et le distinguer d'un autre sans aucune incertitude." (idem)

En cela il partage, fût-ce à une plus grande échelle et de manière plus ostensible, le sort des "nombres finis" qui ne sont pareillement " ni sensibles ni spatiaux " et jouit, tout comme eux, d'un plein droit de cité dans le champ de la mathématique, ainsi que l'a montré " G. Cantor [qui] a récemment introduit les nombres infinis dans un ouvrage remarquable "(idem).

Au total, tous les nombres proclamés par le mathématicien, bien que, ou mieux, parce qu'ils ne sont pas représentables, ne laissent pas d'être absolument définissables et/ou pensables.

---

[83] Husserl, *Philo. de l'arithmétique* 1ère partie chap. VII. p. 151 n (1) et Frege, *P.A.* Préface in Belna p. 320

[84] *op. cit.* Préf. 1ère éd. p. 65 ; cf. égal. § 6 73. ; cf. égal. C.F. Gauss, *Werke* t. VIII p. 201

Ils tiennent tous à notre aptitude « abstrayante » ou « généralisante », elle-même liée au langage ou aux " mots " dont le contenu ne se joue pas au niveau du " représentable " (idem[85]) mais bien à celui du « signifiable », id est dans leur capacité proférer / produire le « sens commun » des êtres, par-delà leurs différences constatables.

" La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes." (Poincaré[86])

A l'encontre du positivisme étriqué de tel épistémologue analytique–" en logique il n'y pas de morale " (Carnap)-, on ne craindra pas, avec le mathématicien-philosophe, de corréler mathématique et éthique, dès lors qu'elles visent toutes deux des «idéaux» ou des «idéalités» et méritent donc le nom de disciplines *normatives* et non strictement *positives* : matières censées nous apprendre ce qui doit être ou comment on doit penser et/ou agir.

" Comme l'éthique, la logique peut aussi être dite une science normative. Comment dois-je penser pour atteindre le but, la vérité ?" (Frege)[87]

Dedekind était bien inspiré en intitulant son livre *Que sont et que* ***doivent être*** *les nombres ?*, notant ainsi d'emblée le caractère normatif des entités arithmétiques. Ni Euclide ni les mathématiciens qui l'ont suivi et prolongé ne contredisent ici Platon. Tous pensent dans le cadre conceptuel que celui-ci a largement anticipé sinon entièrement achevé. Outre la nature idéale de la mathématique, maintes fois accentuée par lui, le Philosophe en a souligné, et ce dès le *Phédon*, nous l'avons vu, la double forme logique exigée par ses notions, et particulièrement par la juste idée des nombres et de leur série. Il reste vrai qu'il ne la *thématisera* que dans le *Parménide* -"l'unique et parfaite théorie du *Parménide*" (Proclus[88])-, où le Théoricien des *Idées* associera au pur principe de l'Unité, le principe, non moins pur, du " Différent et [de] l'Autre ".

En réalité ces deux principes ne font pas eux-mêmes nombre, mais n'en constituent qu'Un, l'*affirmation* de l'Un –soit la proposition « l'Un est »- étant indissociable de celle de la multiplicité ou pluralité –cette proposition requérant complément : « l'Un est ... Autre chose que lui-même ». Dans l'hypothèse contraire, l'Un se condamnerait au ressassement stérile de lui-même ou au silence et n'aurait ainsi point part à l'« Être ».

" Si donc il est, l'Un, nécessairement le nombre est aussi. - Nécessairement ! – Mais, n'est-ce pas ? du moment que le nombre est, il y aura « plusieurs », et pluralité infinie d'êtres ; ou bien le nombre ne serait-il pas pluralité infinie, et n'a-t-il point part à l'Être en se constituant ? – Mais si ! parfaitement. – Par conséquent, si la totalité du nombre a part à l'Être, chaque partie aussi du nombre devra y avoir part ? Oui."

Le "«même »" et l'"«autre» ", "identité ... unicité" et "multiplicité" ou " "fini" et "infini"[89], autant de catégories inséparables.

L'Unité (*Un*) ne se sépare pas de la pluralité (*Dyade indéfinie*) dont elle exprime le lien et réciproquement celle-là suppose celle-ci dont elle explicite le contenu. Soudées l'une à l'autre, elles forment les deux faces d'un seul et même processus intellectuel qui repose sur une logique plus complexe que la logique ordinaire (analytique). A ce propos il ne sera nullement abusif d'invoquer la *Dialectique* et plus généralement de parler de " l'union intime et l'indépendance complète de la logique dialectique telle que nous la concevons et des mathématiques " ou, et pour éviter toute équivoque, de " la participation des Mathématiques à une Dialectique qui les domine " (A. Lautmann[90]).

---

85 *op. cit*. Introd. p. 118–5. Concl. 105. p. 225 (cf. égal. *P.A.* Préf. in Belna p. 326) ; 3. 4. 49. p. 178 ; 46. p. 175 ; 5. Concl. 93. p. 216; 1. 1. 8. p. 134 ; 4. 1. 58. p. 185 ; 84.-85. pp. 208–209 et 1. 60 p. 186

86 *S.M.* chap. II p.32 ; cf. égal. *V.S.* V. p. 106 et D'Alembert, *D.P.E.* 1[ère] partie p. 40

87 Carnap, Frege, *Nachgelassene Schriften*, 1897 in Belna p. 214

88 *Théologie platonicienne* I. 7.

89 *Parm*. 143 b et 144 a ; *Soph*. 254 e et *Phil*. 15 b et 23 c ; vide égal. Leibniz, *Math. Schrif.*

90 *E.N.S.E.M.* 2è partie chap. VI p. 134 et *N.R.S.D.M.* Av[t]-propos p. 203 in *E.U.M.*

Le Stagirite qualifiait d'" une pure fiction ... [cette] théorie ... des éléments des nombres ". Pourtant lui-même n'hésitait pas à y recourir, fût-ce de manière triviale ou impropre.

" Ils [les PLATONICIENS] ruinent, en effet, une foule de vérités mathématiques, puisqu'ils vont jusqu'à chercher une difficulté dans la question de savoir si, quand nous comptons en disant : *un, deux, trois*, nous comptons par addition, ou bien si nous construisons chaque nombre séparément. En réalité, nous faisons l'un et l'autre."

Comme souvent, particulièrement dans sa critique de *La théorie platonicienne des Idées*, sa *dénégation* ou réfutation du platonisme risque fort de s'avérer sa plus haute confirmation. D'ailleurs sa propre théorie du nombre n'en est pas si éloignée que cela :

" La Multiplicité est comme le genre du nombre ; car le nombre est une multiplicité mesurable par l'Un (...). Mais le nombre, en tant que nombre, comporte la différence selon la quantité. " (Aristote[91])

Les « modernes » n'iront guère plus loin dans la définition du nombre, tout en en précisant l'enjeu *dialectique*, l'unité de l'unité et de la multiplicité. Ainsi Leibniz insistera sur le caractère « relatif » du nombre, valable tant pour les entiers que pour les fractions.

" Numeri unitates, fractiones naturam habent relationum " (Leibniz[92])

Et Kant en soulignera la nature synthétique, en accentuant par là-même le véritable paradoxe : l'unité du divers (multiplicité) et de l'homogène (unité).

"L'image pure de toutes les quantités (*quantorum*) pour le sens extérieur est l'espace, et celle de tous les objets des sens en général est le temps. Mais le schème pur de la quantité (*quantitas*) considérée comme concept de l'entendement est le *nombre*, lequel est une représentation embrassant l'addition successive de l'unité à l'unité (homogène à la première) ; donc le nombre n'est autre chose que l'unité de la synthèse que j'opère entre les diverses éléments d'une intuition homogène en général, en introduisant le temps lui-même dans l'appréhension de l'intuition." (Kant[93])

Quant à Hegel, il rappelera sobrement et pertinemment l'essence duelle (dialectique) de cette formation arithmétique qui véhicule en elle à la fois la notion de plusieurs (ensemble/ total) et celle d'unité (un). Et, pour contradictoires qu'elles soient, ces deux déterminations ne s'excluent nullement mais se soutiennent mutuellement ou, pour le formuler mieux, conduisent l'une à l'autre : pas d'*ensemble* (éléments pluriels) sans *unité*, sinon l'on ne serait en présence que d'un agrégat ou amas sans lien, et réciproquement pas d'*unité* sans *pluralité*, sinon tous les nombres se confondraient.

" *Ensemble* (*Anzahl*) et *Unité* sont les *moments* du nombre (*Zahl*). ... L'ensemble (ou total) n'est donc pas une multiplicité *opposée* à l'un circonscrivant, délimitant, mais forme lui-même cette délimitation, cette chose limitée qu'est le quantum précis ; les multiples forment un nombre : *un* deux, *un* dix, *un* cent, etc." (Hegel[94])

Dans ce dernier cas, à la place de nombres déterminés, un deux, un trois ou un quatre, nous ne compterions qu'un nombre, toujours le même et retomberions dans l'expérience, ci-dessus évoquée, de " l'horloge folle"[95]. Autant dire qu'il n'y aurait alors pas de nombre du tout, celui-ci n'acquérant son identité que dans un ensemble : N, ensemble des entiers, Z, ensemble des relatifs, Q, ensemble des rationnels, R, ensemble des réels ou C, ensemble des complexes, sans oublier ℵ, ensemble des transfinis, les transcendants ou encore les quaternions.

Sans jamais là encore faire référence à l'auteur de la *Science de la Logique*, le rédacteur des *Fondements de l'Arithmétique, Recherche logico-mathématique sur le concept de nombre*, en validera les questions.

" Nous nous trouvons devant la difficulté suivante : Si nous voulons engendrer le nombre par la réunion d'objets différents, nous obtenons un amoncellement d'objets ayant conservé exactement toutes les propriétés par lesquelles ils se distinguent les uns des autres, et ce n'est pas cela le nombre. Si d'autre part nous voulons construire le nombre par la réunion de l'identique, les identiques viennent immanquablement se fondre ensemble, et nous ne parvenons pas à la pluralité. Désigne-t-on chacun des objets dénombrés par 1, c'est une faute, car on donne le même signe à ce qui est différent. Donne-t-on à 1 des indices distinctifs, il devient inutilisables pour l'arithmétique."

---

91 *Méta*. M. 7. 1081 b 29 - 32 (cf. A. 6. 987 b 25 sq. ; Plotin, *Én*. V. 1.5. et Proclus, *Th. pl*. I. I. 28. p. 122) ; 1082 b 31 (vide Cours Introduction gale 3. A.) et I. 7. 1057 a 3 - M. 8. 1083a 4

92 *Lettre au P. Des Bosses* 1706 ; vide égal. Malebranche, *D.R.V*. VI. 1ère partie chap. V p. 627

93 *C.R.P*. Log. transc. L. II. chap. I. p. 190 ; cf. égal. *Proleg*. § 10 p. 45

94 *S.L*. L. I. 2è sec. chap. II A. p. 219

95 vide supra II. 1. p. 15

Et dans son cheminement (con-clusions ou réponses) il rencontrera les mêmes *contradictions* qu'il exprimera avec une terminologie aussi « ambiguë » ou « complexe » que ce dernier.

" Il semble que nous devions attribuer aux unités deux propriétés contradictoires : l'unité et la discernabilité."

En ses " définitions " du 0 et du 1, il n'hésitera pas à énoncer d'authentiques et en même temps légitimes « paradoxes » :

" 0 est le nombre cardinal qui appartient au concept « non identique à soi-même ». (...) 1 est le nombre cardinal qui appartient au concept « identique à 0 » "[96]).

Que pourrait-on souhaiter de plus, une fois reconnue la double propriété du nombre ? Les mathématiciens eux-mêmes sont obligés d'en convenir et ne sauraient régresser en deçà de cette définition ou détermination. Telle est, d'après nous, la seule signification acceptable des célèbres formules selon lesquelles il n'y aurait pas lieu de définir le nombre entier.

" Dieu créa le nombre entier, tout le reste est l'œuvre de l'homme." (Kronecker)

" On n'a pas à définir le nombre entier ;" (Poincaré)[97]

Quoi que leurs auteurs aient entendu signifier par ces affirmations, elles ne sauraient vouloir dire que les nombres entiers formeraient des êtres absolument indéfinissables ou irréductibles (premiers) –ce qui induirait une dichotomie illégitime entre eux et les autres nombres-, mais seulement que tous les nombres indistinctement s'originent de définitions, elles-mêmes construites sur une base logique que l'on peut toujours préciser, mais au-dessous de laquelle on ne rétrogradera jamais, si ce n'est sur le mode imaginaire.

C'est sur cette base du reste que reposent toutes les déductions et/ou opérations arithmétiques- numériques, sans lesquelles l'arithmétique n'aurait pas sens et qui participent à l'essence même du nombre.

" Le nombre est l'exponent d'une opération." (Wittgenstein[98])

A quoi se réduirait un nombre, en l'absence de ses combinaisons, liens ou rapports avec les autres nombres, soit des opérations qu'on effectue sur et à partir de lui ? Et cette vérité s'applique à tous les nombres sans exclusive aucune, y compris donc aux nombres entiers.

" Tous les nombres entiers sont même des rapports aussi véritablement que les nombres rompus, ou que les nombres comparés à un autre, ou divisés par quelque autre ; quoique l'on puisse n'y pas faire réflexion, à cause que ces nombres entiers peuvent s'exprimer par un seul chiffre." (Malebranche[99])

Ces derniers se définissent-ils autrement que par l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division des autres nombres (entiers ou non), sous peine de n'être plus des entités numériques ou des résultats, mais des substances figées dont on ne pourrait rien inférer ?

Davantage : elle se généralise immédiatement à toutes les branches de la mathématique, nul objet mathématique, n'ayant le statut d'un être singulier isolé, conformément à sa définition. Ainsi, et pour reprendre nos exemples des définitions géométriques des *Éléments* d'Euclide -*" Le point est ce qui n'a aucune partie "* et *" Une ligne est une longueur sans largeur "*-, il est manifeste que ces dernières énoncent des propriétés « relatives ». Elles posent en effet "le point" et "la ligne" en relation, fût-elle d'absence, avec la ligne, nécessairement divisible, pour la première, avec la surface ou le plan qui comporte toujours deux dimensions, pour la seconde ; étant entendu que l'on peut parfaitement réciproquer ces définitions, comme le fait fort justement d'ailleurs le géomètre dans la suite de ses *Définitions -" Les extrémités d'une ligne sont des points "* et *" Les extrémités d'une surface sont des lignes "*-, ou comme le font aujourd'hui les mathématiciens, en définissant la ligne comme un ensemble de points et le plan comme un ensemble de droites.

---

[96] *op. cit*. 3. 2. 39. p. 168 ; 4. 45. p. 176 et 4. 3. 74 - 76. pp. 200 - 203
[97] Kronecker, et Poincaré, *S.M.* L.II chap. II 12. p. 116
[98] *T.L.-Ph*. 6.021
[99]

Et s'il fallait poursuivre ce processus définitionnel –et en mathématique on se doit d'aller jusqu'au bout, jusqu'à l'épuisement, si possible, de la question-, on rencontrera la notion de l'espace, figurant au rang de *Postulats ou Demandes* chez Euclide, mais posée comme les autres notions de manière à présenter une attache avec elles : *" Deux droites ne renferment point un espace "*. Rien d'étonnant que le sens que l'on accordera à celles-là influera sur celui que l'on donnera à celui-ci et inversement, comme se chargeront d'en fournir une illustration les géométries dites non-euclidiennes, « inventées » par Gauss –*le prince des mathématiciens*-, Lobatchevski, Bòlyai et Riemann, et qui ne forment en réalité que des extensions ou variations de la géométrie euclidienne dans laquelle elles sont du reste, et sans difficulté majeure, traductibles, moyennant " une sorte de dictionnaire ", ainsi que l'ont démontré Beltrami et Poincaré[100], formant ainsi toutes ensemble une *Pan* ou *Méta - Géométrie*.

Si l'on y tient, et à condition de ne pas figer cette vérité, encore moins de l'attribuer à une quelconque intuition, il est loisible de privilégier quelque peu le concept d'*espace*, et de la penser comme la catégorie originaire de la géométrie, dans la mesure où il « englobe » toutes les figures géométriques.

" La géométrie serait absolument incompréhensible sans l'intuition de l'espace, toutes ses constructions étant seulement différentes, de manière à circonscrire et à délimiter celui-ci " (Schelling[101]).

Hegel lui-même débute son exposé de *La Mathématique* ou de *La Mécanique* par sa définition, en prenant soin toutefois de préciser que ce concept synthétise -et n'est donc pas une détermination absolument première, guère davantage d'ailleurs que les notions de point ou de ligne-, les deux catégories de la discrétion et de la continuité :

" L'unité de ces deux moments, de la discrétion et de la continuité, est le concept objectivement déterminé de l'espace ;"

Tant il demeure vrai que toutes les idées s'entre-répondent ou participent les unes des autres.

L'essentiel gît néanmoins ailleurs, dans la reconnaissance du lien étroit unissant Définitions et Démonstrations. Car si celles-là portent non point sur des *êtres* mais sur des *relations*, elles conduisent d'elles-mêmes à celles-ci. Mieux : elles les incluent déjà en elles-mêmes.

" Aussi bien les propositions initiales [de la géométrie euclidienne] ne peuvent-elles être considérées que comme les déterminations directes, déjà inhérentes aux définitions ;" (Hegel[102])

Certes pas de façon manifeste ni univoque, sinon il n'y aurait nul besoin de déductions, les seules définitions suffiraient, mais de manière implicite et pourtant assez claire pour que celles-là n'apparaissent pas arbitraires, sans lien avec ce qui a été « posé » au point de départ.

" Elles [les déductions] sont bien, en fait, contenues dans les définitions, mais elles le sont comme une plante l'est dans la graine, non comme une poutre l'est dans la maison. Souvent, plusieurs définitions sont nécessaires à la démonstration d'une proposition ; elle n'est donc contenue dans aucune d'entre elles prises séparément, bien qu'elle découle de leur conjonction par le seul fait de la logique pure." (Frege[103])

Bien qu'il ait éprouvé quelque difficulté à le concéder dans les chapitres des *Analytiques postérieurs*, faisant partie de l'*Organon*, consacrés à la *Définition* et à la *Démonstration*, le Stagirite finira par reconnaître la complémentarité et même la continuité entre les deux. Dans un premier temps il les distingue voire sépare, rangeant la première dans la rubrique de l'indémontrable : " La définition est une thèse (*position*) ".

Il lui attribue le simple rôle de *poser* les termes géométriques, réservant à la seconde la plus noble tâche d'expliciter ou de *prouver* leur contenu.

" La démonstration aura donc pour objet que la chose est. Et c'est bien là ce que font actuellement les sciences : le géomètre *pose* la signification du terme *triangle*, mais il *prouve* qu'il a tel attribut."

---

[100] *S.H.* 2è partie chap. III. Les géométries non euclidiennes p. 68
[101] *S.I.T.* I Éclair. g) in Essais p. 152
[102] *E.* II. 1ère éd. § 199 ; 2nde éd. § 254 ; add. p. 359 (cf. égal. *P.P.* 3è Cours 2è subdiv. § 104 p. 150) et *S.L.* III. 3è sec. chap. II A. b) 3. p. 530
[103] *F.A.* 5. Conclusion 88. p. 212

Mais face à l'«évidence » du lien unissant ces deux opérations et après maintes hésitations, il qualifiera certaine définition de " quasi-démonstration " et conclura à leur inséparabilité :
" Nous concluons que la définition est, en un premier sens, un discours indémontrable de l'essence ; en un second sens, un syllogisme de l'essence ne différant de la démonstration que par la position des termes ; et, en un troisième sens, la conclusion de l'essence."
Dans les *Topiques* du même ouvrage il soulignera même l'anticipation de la démonstration dans la définition, en indiquant qu'une erreur dans celle-ci rejaillit fatalement sur celle-là.
" Il semble bien aussi, en Mathématiques, que la difficulté dans la démonstration des figures est due parfois à un défaut de la définition " (Aristote[104]).

Il reviendra ainsi sur le partage initial des tâches qu'il avait proposé entre elles. De quelle faute au demeurant pourrait se rendre coupable une définition, si elle ne présupposait déjà en elle un raisonnement et donc une démonstration ?

De la définition il nous faut passer à la démonstration mathématique, en commençant, comme il se doit, par l'examen des principes qui la structurent / valident, id est des axiomes.

B. Axiome

Science déductive et/ou démonstrative, s'il en fût, la Mathématique se confond avec l'Idéal scientifique, en quoi elle ne fait pas nombre avec les autres sciences qui en formeraient " des parties " et mérite pleinement son " nom déjà ancien, mathématique universelle " (Descartes). N'a-t-elle pas toujours été considérée comme "l'organon ... le modèle de la suprême évidence dans les autres sciences" (Kant) ou "comme le modèle d'une déduction rigoureusement scientifique" :
"la forme mathématique est la seule scientifique, la seule qui présente une clôture et un achèvement systématiques, une vue d'ensemble sur toutes les questions possibles et sur les formes possibles de leur solution." (Husserl)[105]
En aucun cas elle ne saurait donc se contenter de dresser un catalogue de définitions seulement posées, mais se doit d'essayer de tout justifier / démontrer, ces dernières incluses. Ne s'identifient-elles pas déjà -nous venons de le remarquer-, à des démonstrations tacites ?

Pour cela elle s'appuiera nécessairement sur des " prémisses " ou principes « évidents » / incontestables, propres à assurer à ses conclusions / démonstrations ou raisonnements une valeur indiscutable et ainsi leur dignité de « vérité ».
" Mais ce que nous appelons ici *savoir* c'est connaître par le moyen de la démonstration. Par *démonstration* j'entends le syllogisme scientifique, et j'appelle *scientifique* un syllogisme dont la possession même constitue la science. Si donc la connaissance scientifique consiste bien en ce que nous avons posé, il est nécessaire aussi que la science démonstrative parte de prémisses qui soient vraies, premières, immédiates, plus connues que la conclusion, antérieures à elle, et dont elles sont les causes." (Aristote)
Il n'est de « science » qu'à ce prix, le reste devant se nommer simple « connaissance » conjecturale voire uniquement opinion.

On conviendra d'appeler de tels principes des « axiomes » (du gr. *axiôma* : estimation) puisqu'ils consistent en jugements (*estimations*) ou propositions premières, dont dépendent toutes les autres propositions mathématiques.
"J'appelle un principe immédiat du syllogisme une *thèse*, quand, tout en n'étant pas susceptible de démonstration, il n'est pas indispensable à qui veut apprendre quelque chose ; si, par contre, sa possession est indispensable à qui veut apprendre n'importe quoi, c'est un *axiome* : il existe, en effet, certaines vérités de ce genre, et c'est surtout à de telles vérités que nous donnons habituellement le nom d'axiomes." (idem[106])
On pourrait également les qualifier de « lemmes » (gr. *lêmma* : proposition prise d'avance), « pétitions », « postulats » (lat. *postulatum* : demande) ou « demandes ». En effet, quoique

---

[104] *Anal. Post.* I. 2. 72 a 22 ; II. 7. 92 b 15 ; II. 10 94 a 1 et 11 et *Topiques* VIII. 3. 158 b 28-30
[105] Descartes, *R.D.E.* IV ; Kant, *D. 1770* Sec. II § 12 ; Husserl, *S.C.N.* p. 355 et *R.L.* 1 chap. XI. § 71 p. 279
[106] *Anal. Post.* I. 2. 71 b 16-22 et 72 a 15-19

l'auteur des *Éléments* différencie les *Postulats ou Demandes* et les *Axiomes ou sentences communes*, ni ses exemples, ni la mathématique moderne ne corroborent cette distinction. De quelque nom que l'on baptise ces énoncés préliminaires, une seule chose importe, comprendre correctement leur fonction ou signification, sachant néanmoins par avance qu'ils répondent à une exigence logique : rendre possibles les démonstrations.
" Les axiomes de la géométrie sont des lemmes de ce genre, des propositions logiques " (Hegel[107]).
Aussi l'on accordera le plus grand soin à leur analyse, vu leur *utilité* principielle.

Comme pour les *Définitions*, arrêtons-nous un instant sur les *Axiomes* d'Euclide, en nous limitant aux deux liminaires d'entre eux : 1. *"Les choses égales à une même chose sont égales entre elles"* et 2. *"Si à des choses égales, on ajoute des choses égales, les touts seront égaux"*. Rien apparemment de plus « évident » que ces deux *" sentences communes "*. Sauf qu'à y regarder de plus près, on s'aperçoit qu'ici, comme dans toutes les autres occurrences, l'évidence est fort trompeuse. Ainsi ces propositions supposent acquises ou connues des notions très peu « évidentes » et pourtant indispensables que celles d'*égalité*, *identité* ("même"), *somme* ou *totalité*. Comment parler de *choses égales*, et a fortiori de *touts égaux* en général, sans l'*égalisation* de toutes les choses particulières et comment, à supposer celle-ci obtenue, vérifier une égalité spécifique à deux d'entre elles, en les comparant à une troisième, présumée stable, *une même chose*, en l'absence d'une *identification* claire de celle-ci ? L'axiome $A = C$ et $B = C \rightarrow A = B$ ne peut prendre sens que si l'on connaît ce qu'est C ou quelle est sa valeur, sinon il ne nous serait d'aucun secours. Pareillement il ne servirait à rien de confirmer l'égalité de sommes / de touts, au moyen d'additions / d'ajouts d'éléments censés être égaux entre eux, si l'on ne savait déjà préciser cette dernière égalité elle-même. $A + B = A + C = B + C$, si et seulement si $A = C$ et $B = C$, ce qui nous ramène à l'axiome précédent.

Or d'où tirons-nous ces idées ? Certainement pas de l'évidence sensible, celle-ci attestant au contraire l'extrême labilité ou variabilité des choses et des êtres et en conséquence de l'impossibilité dans laquelle nous nous trouverions de leur assigner la moindre égalité ou identité, si nous devions nous fier uniquement à nos sens.
" Nous descendons et nous ne descendons pas dans le même fleuve ; nous sommes et nous ne sommes pas."
(Héraclite[108])
Rien en cet univers-ci ne se conserve en l'état et ne demeure identique à soi, tout changeant avec et dans le temps. Si l'on voulait maintenir à tout prix l'idée d'une évidence, celle-ci se trouverait plutôt du côté du non-identique. Mais ce serait encore trop dire, dans la mesure où, ce dernier n'étant lui-même que la « contra-diction » du premier, il le suit comme son ombre et confirme ainsi la non évidence des deux, de l'identique comme du non-identique. Partant l'on ne saurait considérer les axiomes comme des certitudes évidentes et indiscutables ; en regard du monde sensible, il faut au contraire les tenir pour de véritables « énigmes ».

Les propositions dites premières véhiculent ainsi des termes ou significations qui n'ont rien d'immédiat, de directement donné ou de premier, au sens usuel du moins de ce qualificatif. Avec Platon n'hésitons pas à répéter qu'on ne trouve guère trace d'une égalité véritable dans les données empiriques, celles-ci souffrant du témoignage subjectif et/ou variable de chacun.
" Or, examine encore la chose sous ce jour : est ce que parfois des cailloux, des bouts de bois, qui sont égaux, ne sont pas, aux yeux de celui-ci, égaux, et non aux yeux de cet autre, alors, alors qu'il n'y a dans ces choses rien de changé ?"
(Platon)
Pour résoudre le « mystère » de l'axiome de l'égalité, il faut donc pointer dans une tout autre direction que les organes sensoriels, inaptes à nous procurer les concepts qu'il exprime.

---

107 *S.L.* L. 3è 3è sec. chap. II A. b) 3. pp. 528-529
108 Frgt. 49 a et vide Cours Introd. g[ale] 3. A. p. 25

D'autant que la reconnaissance de l'égalité des choses –si approximative fût-elle-, tout comme celle de leurs formes, suppose chez le sujet la connaissance préalable de celle-là, sans laquelle nous ne pourrions jamais dire que deux objets sont « égaux ».

" Ainsi donc, c'est avant d'avoir commencé à voir, à entendre, à user des autres sens, que nécessairement nous sommes trouvés à avoir acquis une connaissance de l'Égal qui n'est rien qu'égal, et de ce qu'il est ; nécessairement, si nous devions être à même, ultérieuremnt, de rapporter à ce terme supérieur les égalités qui nous viennent des sensations ; et pour cette raison que toutes les égalités de cette sorte ont grand envie d'être de l'espèce du terme en question, mais qu'elles ont une moindre valeur." (idem)

Dès lors nous n'avons pas d'autre choix que qualifier cette catégorie d "l'Égal avec le Plus-grand et le Plus-petit [et] ... tout ce qui est du même ordre" de *concept a priori*, d'*Idée en-soi* ou de "« réalité qui n'est que soi »"[109].

Rien d'étonnant que d'aucuns, prenant le relais d'Aristote, l'aient taxée de fiction : "un critère imaginaire d'égalité" ou une "fiction imaginative" de l'identité dira Hume[110]) et Nietzsche, un empiriste à peine plus sophistiqué, pour ne pas dire sophiste, verra dans "l'unité, l'identité, la durée, la substance, la cause, la réalité, l'être ... qu'un vain mot" ou des "fictions conventionnelles". Ce faisant ils commettront cependant une lourde inconséquence, en revenant à une genèse qu'ils ont eux-mêmes dénoncée ; car entre la sensation et l'image la différence est minime. Et si l'on accordera au généalogiste sa vérité :

" Tout concept naît de l'identification du non-identique." (Nietzsche)

C'est en fait pour la retourner contre lui-même. Car si l'« identique » est bien l'objet d'une *affirmation* -produit et non donné-, il ne l'est ni plus ni moins que le « non-identique » qui n'en est que la *négation* ; il ne relève donc pas davantage de la *fiction* ou du mensonge que ce dernier, sauf à parler de fiction *originaire*. Tous deux articulent des moments du vrai, formant des définitions ou délimitations de l'Être, de véritables conditions de possibilité de tout *discours* de / sur lui. Sans eux ni le mathématicien ni le philosophe, ne seraient capables d'articuler de quelconques sentences identifiables, id est sensées, pas même celles dirigées contre l'identité, par lesquelles " le philosophe au marteau "[111] trahit néanmoins qu'il n'entend pas lui-même ce qu'il dit, mais se contente effectivement de marteler au lieu de parler.

Ainsi les *axiomes* ressemblent, à s'y méprendre, aux *définitions* et pour cause : ils ne sont en réalité que des définitions à peine déguisées ou travesties.

" *Les axiomes de la géométrie* (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) *ne sont que des définitions déguisées*."
(Poincaré[112])

Il n'y a donc pas lieu de séparer les deux, ceux-là précisent celles-ci qui les préfigurent. Et, nonobstant le jugement du grand mathématicien-physicien français, cette connexion s'applique à tous les axiomes, ceux de l'arithmétique inclus. Les axiomes euclidiens portant sur l'égalité, valant indistinctement en géométrie et en arithmétique finie, l'illustrent ad libitum, pour peu qu'on les (re)lise attentivement.

Qu'enseignent d'ailleurs en définitive ces derniers sinon que, comme nous l'avons dit, l'*égalité* ou le rapport d'équivalence entre deux choses passe par leur égalité respective à une troisième dont l'« identité » ou l'« égalité » à soi doit être établie. Or celle-ci ne saurait à son tour être assurée que moyennant sa comparaison ou relation avec les autres : $A = A$, si et seulement si $A \neq B, C, D$ etc. Et c'est précisément ce que stipulent déjà implicitement et à titre particulier les *Définitions* des êtres mathématiques, tant géométriques qu'arithmétiques. Un point n'est un point, figure indivisible (*"aucune partie"*), que pour autant qu'il n'est pas une

[109] *Phédon* 74 b et 75 bcd
[110] *T.N.H.* I. 2è partie Sec. IV. p. 117 et 4è partie Sec. II. p. 289
[111] *C.i.* La « Raison » p. 105 ; *P.B.M.* 1ère partie 21. (cf. *G.M.* 1ère diss. 13. et *L.ph.* III. 1.) ; *L.ph.* III. 1. p. 181 et
[112] *La Science et l'Hypothèse* 2è partie chap. III. p. 76

ligne, un plan ou un espace eux divisibles, et une ligne n'est ce qu'elle est, une forme undimensionnelle (*"sans largeur"*), que par différenciation à la fois avec le point, lui sans nulle dimension et avec les configurations pluridimensionnelles (triangle, plan, espace etc.).

Similairement l'unité arithmétique ne se définit que par son opposition à la pluralité. Une chose *n'est appelée une*, un être homogène (un), que parce qu'elle n'est pas considérée comme plurielle (deux, trois, quatre etc.). Quant à la pluralité numérique –*"le nombre"*-, elle ne peut être qualifiée de *" multitude composée de plusieurs unités "*, que parce qu'on en considère les composants comme des uns semblables et non comme des êtres / unités hétérogènes, auquel cas on ne pourrait jamais les sommer /multiplier /diviser. La *définition* de l'*un* implique celle de l'autre (*multitude*) et énonce par anticipation l'*axiome* de l'identité et/ou de l'*égalité*. Conséquemment que telle définition (notion), celle de l'*espace* par exemple, soit mentionnée par Euclide dans les *Postulats ou Demandes* (Axiomes) plutôt que dans les Définitions, où l'on s'attendrait à la trouver, trouble peut-être la cohérence de la présentation des *Éléments* mais nullement celle de la Géométrie en général.

Dans sa célèbre *Axiomatique* des nombres naturels –dont la première version est incluse en ses *Arithmetices Principia* et une seconde, revue et corrigée, en ses *Notations de Logique mathématique, Introduction au Formulaire de Mathématiques*-, le grand mathématicien-logicien italien Peano, un des maîtres d'oeuvre de la formalisation des mathématiques, réduisant les Définitions (notions primitives) et les Axiomes (propositions primitives), nécessaires à leur construction / théorie, au strict minimum, aboutira à une quasi assimilation des uns aux autres, ceux-ci n'y faisant qu'expliciter celles-là, à moins qu'on ne préfère dire que les premières précontiennent implicitement en elles les seconds.

Et de fait que sont ses trois notions primitives :
0, le nombre, le successeur
Sinon des énonciations ou positions à la fois anticipatrices et en attente d'une définition ou détermination qu'expriment précisément les axiomes ou propositions subséquentes :
(1) 0 est un nombre.
(2) Le successeur d'un nombre est un nombre.
(3) Deux nombres ne peuvent avoir le même successeur.
(4) 0 n'est le successeur d'aucun nombre.
(5) Toute propriété qui appartient à 0, ainsi qu'au successeur d'un nombre qui possède cette propriété, appartient à tous les nombres.

Remarquons au passage que toutes ces propositions, et particulièrement les *(2)* et *(3)*, reprennent à leur compte la nature *contradictoire* du nombre et du principe qui le sous-tend, d'être un identique non identique : *le successeur ... est un nombre* mais pas *le même* nombre. Quant à la *(5)*, sur laquelle il nous faudra revenir, tout en reformulant " la démonstration par récurrence "[113], elle présuppose la même identité-non identité. D'une propriété valable pour 0, un nombre «différent» des autres nombres, car il n'est le successeur d'aucun, et pour n'importe quel nombre, «identique» aux autres, puisqu'il en est lui le successeur, elle conclut à son extension à tous les nombres, postulant leur identité universelle, malgré leurs différences.

Cette corrélation entre Axiomes et Définitions et la détermination paradoxale des entités mathématiques qu'elle traduit se retrouvent dans l'ensemble du champ mathématique, témoignant ainsi de l'existence, au-delà des *Mathématiques*, d'une seule et unique Science, soit la *Mathématique*. Et celle-ci ne date pas d'aujourd'hui mais remonte à l'origine même de

[113] cf. Pascal, *T.T.A.* et Poincaré, *S.H.* 1ère partie, chap. I. Sur la nature du raisonnement mathématique IV p. 38

cette science, quand bien même la mathématique moderne l'aurait amplement confirmée. Bien avant celle-ci et avant même les classiques, Descartes ou Leibniz, elle fut fortement affirmée par un Ancien, Proclus, dans ses *Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide* :
" une seule science qui fait résider simultanément toutes les connaissances mathématiques dans une seule ".
Il y notera la stricte homologie entre " l'unité " arithmétique et " le point " géométrique[114].

En effet, tout d'abord et à sa suite, on pointera que toutes les branches de la *Mathesis*, au premier rang desquelles la Géométrie ou l'Analyse, recourant au nombre, présentent des analogies entre elles et avec l'Arithmétique. Il est logique que l'unification de la Mathématique se soit faite sous l'égide de celle-là. L'arithmétisation des disciplines susnommées a d'ailleurs été largement entamée par les Pythagoriciens :
" aussi certains philosophes [les PYTHAGORICIENS] soulèvent-ils dès lors la difficulté, même au sujet du cercle et du triangle, prétendant qu'il ne convient pas de les définir par les lignes et par le continu, toutes qualités qui ne seraient au cercle et au triangle que ce que sont les os à l'homme, et l'airain et la pierre à la statue ; et ils ramènent toutes les notions mathématiques aux nombres, et disent que la notion formelle de la ligne, c'est la notion même du deux." (Aristote[115])
D'autres Grecs (Eudoxe, Euclide, Diophante), poursuivront l'oeuvre des premiers, et en fourniront des preuves supplémentaires dans leur théorie des proportions, raisons ou rapports. Enfin il appartiendra à des mathématiciens français (Cauchy, Méray) et allemands (Kronecker, Weierstrass) du XIXè d'achever l'arithmétisation de l'Analyse.
" On peut constituer entièrement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers ; il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'expérience."
(J. Tannery[116])

Tout en affermissant ou affinant les contours et détails de l'*unique* Science mathématique, les Modernes ne s'écarteront jamais du chemin qui leur avait été prétracé par les Anciens.
" Sous le nom collectif de MATHÉMATIQUES, on désigne un système de connaissances scientifiques, étroitement liées les unes aux autres, fondées sur des notions qui se trouvent dans tous les esprits, portant sur des vérités rigoureuses, que la raison est capable de découvrir sans le secours de l'expérience, et qui néanmoins peuvent toujours se confirmer par l'expérience, dans les limites d'approximation que l'expérience comporte."
(Cournot[117])
Aussi ce qui vaut pour l'une de ses composantes (arithmétique /algèbre) vaut obligatoirement pour les autres (géométrie, analyse, topologie etc.), toutes s'entre-répondant, faute de quoi elles ne co-appartiendraient pas justement à la Mathesis en général.

Puis on soulignera combien l'arithmétique est co-hérente (une), sise qu'elle est sur le socle du « calcul » des entiers, tous les nombres formant une « extension » des entiers « naturels ». Si "tous les nombres entiers sont même des rapports" (Malebranche), ils engendrent, le plus logiquement du monde, des nombres (autres), ne serait-ce que pour permettre l'extension de leurs propres opérations, et certifient que "le nombre [en général] est [bien] l'exponent d'une opération" (Wittgenstein)[118]. Ainsi les nombres négatifs et donc Z, l'ensemble des relatifs, sont nés pour donner sens à des soustractions du type 1 – 2 et les rationnels, Q, pour justifier des divisions telle ½ impratiquable telle quelle dans N. Quant à R, ensemble des réels, ou C, celui des complexes, ils doivent leur existence ou légitimité mathématique à leur capacité de généraliser l'opération de l'extraction des racines, sans avoir à tenir compte de la valeur entière ou non de ces dernières, ou de résoudre toutes les équations du second degré à une inconnue, y compris celles qui présentent dans leur second membre un radical négatif.

---

114 *op. cit*. pp. 4-5 et 92. 27-93 (cf. égal. 39. 7-20) ; pour Descartes, vide supra Introduction p. 3 note 13
115 *Méta*. Z 11 1036 b 8-13
116 *Introd. à la théorie des fonctions d'une variable,* Préf. in *Science et Philosophie* (1912) p. 280
117 *O.L.C.A.G*. p. 355
118 vide supra A. p. 23 notes 94 et 95

Est-ce dire qu'il faille prendre à la lettre la formule déjà citée de Kronecker, un des artisans de l'arithmétisme -" Dieu créa le nombre entier, tout le reste est l'œuvre de l'homme."[119]- et ne plus s'interroger plus avant ? Certes si, comme nous l'avons dit, il n'est point question de régresser en deçà de certaines définitions et principes logiques à l'origine des nombres, cela n'implique pas qu'on puisse s'arrêter à telles définitions et/ou axiomes présumés irréductibles. On se montrerait sinon infidèle à la « méthode » mathématique dont le propre est de ne rien accepter, sans démonstration, discussion ou preuve suffisante.

Même les tout premiers axiomes doivent être soumis au feu de la critique, avant qu'on puisse décider de leur statut. En soi et antécédemment à tout examen, ils ne sauraient être considérés comme " des *premiers* absolus " ou des proposition de base, sauf à les assimiler à " de simples tautologies ".

" Les *axiomes*, pour les mentionner à la même occasion, font partie de la même classe [celle de déterminations (qui sont) des *présuppositions* (et forment ainsi) le *premier* relatif]. C'est à tort qu'on les considère généralement comme des *premiers* absolus, comme s'ils n'avaient pas besoin, en-et-pour-soi, de démonstration. S'il en était vraiment ainsi, ils seraient de simples tautologies, car c'est seulement dans l'identité abstraite qu'aucune différence n'existe, et c'est seulement elle qui n'a pas besoin de médiation." (Hegel[120])

Le lien des définitions et des axiomes se prolonge inexorablement en l'unité commune des deux avec les démonstrations qui forment le coeur ou la substance même de la Mathématique. Que vaudrait cette Science, en l'absence de ses déductions, si pénibles voire superflues qu'elles paraissent à certains ? Elle ne se différencerait alors guère d'une psalmodie.

" En ce qui concerne les vérités *mathématiques*, on tiendrait encore moins pour un géomètre celui qui saurait *du dehors* et par coeur les théorèmes d'Euclide, sans savoir leurs démonstrations ou, comme on pourrait s'exprimer par contraste, sans les savoir *du dedans*." (Hegel[121])

Nul, pas même un roi, ne saurait s'affranchir du laborieux chemin de la justification comme l'opposait Euclide précisément à un monarque trop pressé d'arriver au résultat :

" Il n'y a pas de voie royale [impériale] vers la géométrie [qui mène au temple de la géométrie]." [122]

De la *Définition* et/ou de l'*Axiome* il nous faut donc passer sans tarder au *Théorème*, afin de parachever notre analyse des catégories mathématiques et pouvoir ainsi répondre pleinement à notre question sur l'essence de la *Mathesis*.

C. <u>Théorème</u>

Si la Mathématique commence bien par des définitions ou des axiomes, elle ne s'accomplit que par les démonstrations ou théorèmes (gr. *théorêma* : « objet d'étude ») auxquels du reste les premiers conduisent et qui leur offrent en retour consistance ou valeur, sans laquelle ils se résumeraient à des propositions arbitraires. Car, alors que ceux-ci font appel à une adhésion externe (postulation), toujours fluctuante et révisable, de l'esprit, ceux-là s'adressent à l'« approbation » (preuve) ou conviction interne, indiscutable, de ce dernier.

" N'est ni une hypothèse, ni un postulat, ce qui est nécessairement par soi et qu'on doit nécessairement croire. <Je dis : *qu'on doit nécessairement croire*>, parce que la démonstration, pas plus que le syllogisme, ne s'adresse au discours extérieur, mais au discours intérieur de l'âme. On peut, en effet, toujours trouver des objections au discours extérieur, tandis qu'au discours intérieur on ne le peut pas toujours." (Aristote[123])

End'autres termes, seule la démonstration dote les énoncés mathématiques de l'« évidence »: nécessité ou vérité qui est à la fois l'honneur et la marque spécifique de cette science.

" C'est l'*honneur* de la mathématique, que toutes les propositions qu'elle contient soient *strictement démontrées* " (Hegel).

---

119 cf. supra A. p. 23 note 93

120 *S.L.* III. 3è sec. chap. II A. b) 3. p. 528

121 *Phén.E.* Préf. p. 97

122 vide supra Introd. p. 2 et Hegel, *op. cit.* fin

123 *Anal. Post.* I. 10. 76 b 23-27

Essence et impératif de rigueur confluent pour donner à la Mathesis la figure d'une discipline démonstrative. Pour se conformer à celle-ci, on doit donc absolument justifier (*dé-montrer*) tout rapport d'un théorème et non plus simplement l'admettre (*montrer* ou présenter) comme dans les définitions ou les axiomes.
" Dans le théorème, au contraire, il doit être *démontré*. (...) Quelque parfait ou imparfait que soit un théorème, il doit être *démontré*." (idem[124])

Et en aucun cas on ne confondra la déduction ou preuve mathématique avec une vérification inductive ou expérimentale, propre à la Physique. Une telle démarche n'aurait au demeurant pas de sens en Mathématique, sa nature a posteriori et particulière ne pouvant conférer aux propositions de cette matière la pureté et l'universalité qui la caractérisent, dès ses origines.
" Mais il est inscrit dans l'essence des mathématiques que partout où l'on peut donner une preuve, elle est préférable à une confirmation inductive." (Frege[125])

La démonstration proprement mathématique ne saurait emprunter que la voie a priori, comme il ressort du premier des théorèmes connus, celui dit de Thalès.
" Le premier qui démontra le *triangle isocèle* (qu'il s'appelât *Thalès* ou de tout autre nom) fut frappé d'une grande lumière ; car il trouva qu'il ne devait pas s'attacher à ce qu'il voyait dans la figure, ou même au simple concept qu'il en avait, mais qu'il avait à engendrer, à construire cette figure, au moyen de ce qu'il pensait à ce sujet et se représentait *a priori* par concepts, et que, pour connaître avec certitude une chose *a priori*, il ne devait attribuer à cette chose que ce qui dérivait nécessairement de ce qu'il y avait mis lui-même, en conséquence de son concept."
(Kant[126])

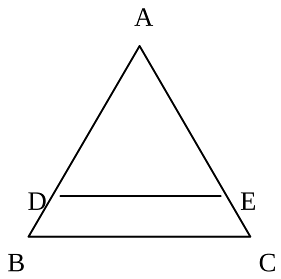
Laissons-nous guider par son exemple, pour rendre la chose obvie.

Plutôt que de nous arrêter cependant à la propriété particulière de la similitude des angles opposés aux côtés égaux du triangle isocèle, examinons la démonstration plus générale, attribuée également à Thalès, sur l'homothétie ou sur les proportions (rapports de distance) dans un triangle quelconque, équiangle inclus, coupé par deux droites parallèles. Selon la légende elle lui aurait permis de mesurer la hauteur de la pyramide de Chéops[127].

De quoi et comment nous instruit cette démonstration ? Revenons à sa présentation euclidienne[128] pour le dire. Elle commence par l'affirmation du théorème et de sa réciproque :
" Si on mène une ligne droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle, laquelle coupe les deux autres côtés ; elle les coupera proportionnellement : et si deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la ligne coupante sera parallèle à l'autre côté."
Celui-ci énonce tout à la fois une propriété de la parallèle et du triangle, formulant d'emblée une relation entre ces deux figures et donc une vérité, non point isolée, immédiatement donnée ou visible à même un être particulier, mais construite / déduite à partir de la mise en rapport d'au moins deux êtres ou plutôt notions (parallèle, triangle) et même plus (ligne : droite, parallèle, sécante ; triangle : côté, base, hauteur, aire).

Son énonciation même témoigne ainsi du caractère corrélatif ou sytématique des êtres ou vérités mathématiques que sa démonstration confirmera / justifiera amplement et précisément. Pour ce faire, cette dernière recourra à un exemple de la ligne et du triangle, puisque c'est bien d'eux dont il s'agit.
" Soit le triangle ABC, dans lequel soit menée la ligne droite DE parallèle au côté BC, coupant les deux autres côtés AB et AC aux points D et E."

[124] *S.L.* I. 2è s. ch. II. C. c. Note 1. p. 303 (A. Doz, *T.M.* p. 129) et III. 3è sec. chap. II A. b) 3. 1. pp. 527-532
[125] *F.A.* Introd. 2. p. 126 ; vide égal. Russell, *Introd. philo. mathématique* chap. XIV. pp. 174 - 175
[126] *C.R.P.* Préf. 2[nde] éd. p. 39
[127] vide Proclus, *C.P.L.É.E.* 250. 20. ; D. Laërce, *V.D.S.P.I.* I pp. 52 53 et Plutarque, *Sept. Sap. Conv.* II 147 A
[128] in *Éléments* Livre VI. Prop. II.

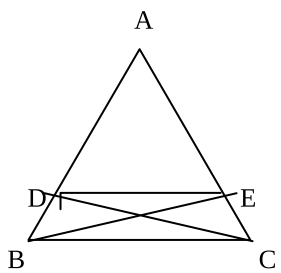


Cependant il ne saurait y être question d'un modèle sensible particulier -un triangle ou une ligne droite trouvés-, auquel cas la démonstration se condamnerait à n'être qu'elle-même particulière, mais uniquemet d'un exemplaire général –le triangle ou la ligne droite antécédemment « définis » ou pensés-, seul en mesure de servir de base à un « théorème » valable en maintes/toutes occurrences.

Certes le dessin est ici nécessaire, comme point d'appui au raisonnement.
" car toute invention de théorème requiert une schématisation de l'idée dans la matière intelligible " (Proclus[129])
Encore ne doit-on pas oublier que lui-même a le statut d'un « schème » et non d'une image, c'est-à-dire d'une figuration « intelligible » et non sensible, ce qui autorise au demeurant Euclide à y « voir » directement dans un premier temps, ce qui ne s'y trouve en fait que grâce à des démonstrations antérieures déjà acquises et qui forment les prémisses de celle à venir.
" Je dis que les côtés AB, AC sont coupés proportionnellement aux points D et E, c'est-à-dire que AD sera à DB, comme AE est à EC."
La suite de sa proposition ne laisse planer aucun doute là-dessus.

Et celle-ci concerne l'essentiel, la démonstration proprement dite. Même en se limitant à sa version directe, sans sa réciproque, il appert clairement que les constructions et déductions requises pour valider l'affirmation première n'ont rien de commun avec une simple monstration ou perception sensible, mais s'inscrivent dans un « contexte » théorique d'où elles tirent leur sens et confèrent ainsi une assise rationnelle à l'énoncé de la proposition en cause. Quelles sont au juste celles-là ?

Pour établir la proportionnalité dont parle le théorème, comparons les triangles que nous pouvons forger, à l'intérieur du triangle ABC que nous nous sommes donné au point de départ, et avec les deux autres points D et E de la ligne droite parallèle à BC pour sommets. Menons ainsi les lignes BE et CD.



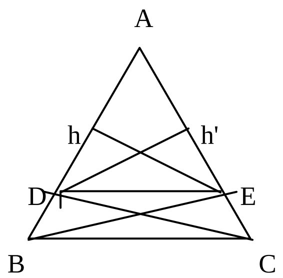
Par la Proposition XXXVII du Premier Livre des *Éléments –" Les triangles constitués sur une même base ; et entre mêmes parallèles, sont égaux entre eux."*- les triangles DEB et EDC, ayant la même base DE et étant compris entre les parallèles DE et BC, auront même aire (superficie) ou seront égaux.

[129] *C.P.L.É.E.* 77. 7.

" Car étant menées les deux lignes BE et CD : par la Prop. 37 Livre I. les deux triangles DEB et EDC, étant sur même base, et entre mêmes parallèles, sont égaux ;"

Et selon la Proposition VII du Livre V –*" Les grandeurs égales, ont même raison à une même grandeur ; et celle-ci aura même raison aux grandeurs égales."*-, corollaire du premier *Axiome* des *Éléments* : *"Les choses égales à une même chose sont égales entre elles"*[130], ils auront même proportion (raison) au triangle ADE.
" et par la Prop. 7 Livre V ils auront même raison l'un comme l'autre au troisième ADE."

Afin d'expliciter davantage notre comparaison et en tirer toutes les conséquences possibles, complétons le schéma des différents triangles en y adjoignant leurs hauteurs respectives.



Ainsi suivant la Proposition I Livre VI -*" Les triangles et les parallélogrammes de même hauteur sont l'un à l'autre comme leurs bases."*-, les triangles DEB et DEA, partageant la même hauteur (h), la perpendiculaire menée de leur sommet commun E sur le côté A(D)B, seront l'un à l'autre comme la base BD à la base DA. Pareillement, et toujours suivant la même Proposition, les triangles CDE et EDA, partageant également une même hauteur (h'), la perpendiculaire menée de leur sommet commun D sur le côté opposé A(E)C, seront similairement l'un à l'autre comme la base CE est à la base EA.
" Mais par la Prop. I Liver VI les triangles DEB et DEA, étant de même hauteur, sont l'un à l'autre comme la base BD à la base DA ; et par la même Proposition, le triangle CDE, étant de même hauteur que le triangle EDA, ils seront aussi l'un à l'autre, comme CE est à EA ".

En conséquence et en vertu de la Proposition XI Livre V -*" les raisons qui sont de même à une autre, sont aussi de même entre elles."*-, qui prolonge aussi l'*Axiome* 1., BD s'avère être dans la même proportion (rapport ou raison) à DA que CE à EA, ce qu'énonce au bout du compte le théorème et ce que l'on se proposait de démontrer.
" et partant par la Prop. XI Livre V BD sera à DA, comme CE à EA : (puisque ces deux raisons sont les mêmes que du triangle BED au triangle DEA, et du triangle CDE au même Triangle DEA). Ce qui était proposé."
En écriture plus moderne cela donne : BD/DA = CE/EA   *C.Q.F.D.*

Au total, bien qu'il concerne une propriété spécifique du triangle, l'homothétie de ses côtés, le *Théorème de Thalès* s'inscrit, tant dans son contenu -celui-ci valant pour toutes droites parallèles rencontrant des sécantes quelconques-, que dans sa forme –cette dernière recourant à toutes sortes de théorèmes autres lors de sa validaton-, dans l'ensemble du Mathématique. Réciproquement on peut l'utiliser pour justifier d'autres propositions ou formules, telle l'équation algébrique de la ligne droite, y = ax + b, -anticipée par la Proposition VII Livre V-, qui en est l'application, étant donné la variation continue et proportionnelle qu'elle exprime.

Vu son antériorité (chronologique), on serait tenté d'y reconnaître l'origine ou le réel commencement de la *Mathesis*.

[130] vide supra B. p. 25

" L'équation de la ligne droite n'est que l'expression algébrique du théorème de Thalès sur la proportionnalité des côtés dans les triangles équiangles, théorème dont l'invention ou l'énonciation formelle marque le commencement de la géométrie et celui de toute science exacte." (Cournot[131])

Mais, comme en celle-ci tout se tient, plutôt qu'à un mathématicien déterminé -"qu'il s'appelât *Thalès* ou de tout autre nom" (Kant) ; "quelque Thalès de la géométrie...ce Thalès imaginaire" (Husserl)-, on renverra la véritable *Origine de la Géométrie* à la représentation "*a priori* par concepts (...) cette faculté d'intuition *a priori*" (Kant) ou à "un acte spirituel d'idéalisation ... un savoir « pur »" (Husserl)[132] propre à l'Humanité en général dont les Grecs furent assurément d'éminents instigateurs mais nullement les « créateurs » ou instaurateurs[133].

Quant à cette totalité mathématique et l'« acte » intellectuel qui la sous-tend, ils sont eux-mêmes suspendus, on l'a vu, à l'Axiome ou au Principe de l'Égalité que l'on retrouve trait pour trait, ce qui n'est pas fait pour nous surprendre, dans les raisonnements arithmétiques. Ces derniers se fondent en effet tous sur lui.

" Mais faites attention que ce mot, *vérité*, ne signifie que rapport. Car deux et deux sont quatre n'est une vérité, que parce qu'il y a un rapport d'égalité entre 2 et 2 et 4. De même 2 et 2 ne sont pas 5, n'est aussi une vérité, que parce qu'il y a un rapport d'inégalité entre 2 et 2 et 5." (Malebranche[134])

La démonstration leibnizienne de la vérité *évidente* du 2 + 2 font 4[135], l'illustre parfaitement. En la commentant nous parachèverons notre étude du théorème / de la théorie mathématique. Pour cela rappelons d'entrée que rien ne saurait être admis comme évident ou immédiat en cette discipline ; tout y requiert et trouve du reste justification, même ses vérités élémentaires, telles celles du comput le plus ordinaire, contrairement à ce que voudrait un empirisme obtus :

" car on connaît (selon lui [Locke]) la vérité de ces sortes de propositions sans le secours d'aucune preuve."

Après tout qu'est-ce qui nous garantit non seulement que nous ne nous trompons pas lors de "l'addition de deux et de trois" (Descartes[136]) mais que celle-ci fait simplement sens ?

On n'hésitera donc pas à soumettre à l'approbation logique l'ensemble des calculs, y compris deux et deux font quatre, étant admis que, pas plus que les autres nombres, *quatre* n'est une donnée immédiate mais le fruit d'une « construction » ou élaboration arithmétique.

" Je dis que je vous attendais là bien préparé . Ce n'est pas une vérité tout à fait immédiate que deux et deux sont quatre, supposé que *quatre* signifie trois et un. On peut donc la démontrer, et voici comment " :

Aussi dans cette tâche on procédera, comme partout ailleurs dans le champ mathématique, en partant des définitions afférentes aux « objets » en cause, ici les déterminations des nombres concernés par l'opération que l'on se propose de vérifier. Et celles-ci ne peuvent que se baser sur l'essence «relative» ou «successive» des nombres, soit le fait qu'ils s'obtiennent, nous l'avons vu dans la discussion des définitions mathématiques en général, les uns à partir des autres, moyennant les catégories de L'*Un* (unité) et de la *Dyade* : « et » qui signifie l'ad-dition ou la multi-plication[137].

" *Définitions* :
1) *Deux* est un et un
2) *Trois* est deux et un
3) *Quatre* est trois et un "

---

[131] *O.L.C.A.G.* p. 173
[132] Kant, *C.R.P.* Préf. 2nde éd. p. 39 – *Pr.* § 11 p. 46 et Husserl, *O.G.* in *C.S.E.P.T.* App. III. § 9 a. pp. 418 et 425 cf. égal. *I.D.P.* I 3è sec. chap. III p. 327 (a)
[133] vide supra I. B. 2. p. 9 et 1. p. 12
[134] *Entretien d'un philo. chrétien et d'un philo. chinois* p. 19 ; cf. égal. *D.R.V.* VI. Ière partie chap. V p. 625
[135] **Texte** in *N.E.* IV. VII. § 10 pp. 364-365
[136] *Méd*. 1ère p. 270
[137] vide supra A. p. 21

Puis on affirmera / postulera les axiomes, en l'occurence un seul, celui précisément de l'Égalité -le premier *Axiome* des *Éléments* : *" Les choses égales à une même chose sont égales entre elles "*-, suffisant à la démonstration recherchée, et qui légitimera les équivalences ou substitutions dont aura besoin toute l'argumentation.

" *Axiome*. Mettant des choses égales à la place, l'égalité demeure."

Comme tout axiome, ce dernier peut être tenu pour " une définition " (Frege), comme n'a pas manqué de le remarquer Leibniz qui l'explicitera comme telle ailleurs[138].

S'ensuivra alors la démonstration réglée elle-même qui posera d'abord les prémisses du raisonnement, sous la forme d'un simple enchaînement des définitions antécédentes et de "l'opération x + 1" (Poincaré[139]) qu'elles supposent.

" *Démonstration* :

2 et 2 est 2 et 1 et 1 (par la déf. 1) ….. $2 + 2$

2 et 1 et 1 est 3 et 1 (par la déf. 2) …….. $\underbrace{2+1}+1$

3 et 1 est 4 (par la déf. 3) …………….. $\underbrace{3+1}_{4}$

D'où, et dans le strict respect de l'axiome-définition de l'égalité, l'on tirera la conclusion qui s'impose et qui vérifie l'énoncé qu'il fallait démontrer. *C.Q.F.D.*

" Donc (par l'axiome)
2 et 2 est 4. Ce qu'il fallait démontrer."

Ce qui se présentait comme un acquis ou plutôt comme un donné indiscutable, se révèle finalement pour ce qu'il est, le « produit » d'une démarche ou réflexion scientifique.

Plus économiquement et formellement on exprimera celle-ci, en écrivant :
$2 + 2 = 2 + 1 + 1$ (Déf. 1)
$2 + 1 +1 = 3 + 1$ (Déf. 2)
$3 + 1 = 4$ (Déf. 3)
Et, recourant à une forme plus directe de l'axiome de l'égalité, A = A, on conclura : $2 + 2 = 4$.

Mais à vrai dire cette autre formulation est implicite à la précédente.

" Je pouvais, au lieu de dire que 2 et 2 est 2 et 1 et 1, mettre que 2 et 2 est égal 2 et 1 et 1, et ainsi des autres. Mais on le peut sous-entendre partout, pour avoir plus tôt fait ; et cela en vertu d'un autre axiome qui porte qu'une chose est égale à elle-même, ou que ce qui est le même est égal."

Quant à la " lacune " qu'y repère Frege -" l'omission des parenthèses "-, elle est aisément corrigible, d'autant qu'elle est parfaitement comblée par les accolades dans la première traduction de la démonstration. Donnons-en néanmoins la version la plus exacte possible :
$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$
$2 + (1+1) = (2+1) + 1$
$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$[140]

Pour superflu que paraisse ce détour théorique ici, vu le caractère bien connu du résultat, il n'en est pas moins indispensable, puisqu'il témoigne de la co-hérence ou de la solidarité des vérités mathématiques entre elles, dont aucune ne dérive de rien, toutes étant dépendantes des mêmes définitions et/ou axiomes.

" Cette démonstration, quelque peu nécessaire qu'elle soit par rapport à sa conclusion trop connue, sert à montrer comment les vérités ont de la dépendance des définitions et des axiomes."

---

[138] Frege, *F.A.* 1. 6. p. 130 et Leibniz, *Non inelegans specimen demonstrandi in abstactis*
[139] *S.H.* 1ère partie chap. I. II p. 33
[140] *F.A.* 1. 6. p. 131 ; vide égal. Poincaré, *S.H.* 1ère partie chap. I. II p. 33

Le quidam non-mathématicien peut bien considérer tout cet appareillage " étrange ... [voire] absurde " (Schopenhauer[141]), il n'empêche que c'est lui seul qui procure aux énoncés mathématiques ses lettres de noblesse et que sans lui, l'Arithmétique ne vaudrait guère mieux que le calcul sur les doigts des enfants ou les décomptes en caisse d'un épicier.

Grâce à cette méthode, en lieu et place d'une énonciation immédiatement évidente mais sans fondement, et partant purement sujective, la *Mathesis* nous offre des propositions reposant sur une évidence ou intuition raisonnée et donc « objective », conformément à la directive cartésienne, illustrée par le même exemple :

" Or cette évidence et cette certitude de l'intuition ne sont pas requises seulement pour de simples affirmations, mais aussi pour toute espèce de raisonnement "[142].

A une telle démonstration, à laquelle il déniera le titre de " démonstration proprement dite ", la qualifiant de simple " vérification ", Poincaré préférera " la démonstration pa récurrence ".

" Ce procédé est la démonstration par récurrence. On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers."

Opposant celle-ci à l'argumentation leibnizienne, il y verra " le raisonnement mathématique par excellence " et la marque de ce qu'il nommera avec Kant le *jugement synthétique a priori* qui prévaudrait dans la Mathématique.

" Cette règle inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori*."

Mais qui ne voit que la récurrence est inscrite dans la définition même du nombre, ou de toute autre entité mathématique, dont elle connote seulement le caractère « progressif » ou indéfini. Aussi elle n'est " un instrument qui permet de passer du fini à l'infini " que pour autant que ce dernier est déjà présupposé, dès la position des premiers nombres. En aucun cas elle ne surajoute donc à la démonstration mathématique une nouvelle procédure. Celle-là demeure en tout état de cause "une marche purement analytique". Et c'est "par des raisonnements purement analytiques" que l'on établit, prouve ou *vérifie*, les différentes étapes du raisonnement dit par récurrence, c'est-à-dire du raisonnement ou de l'analyse tout court. En science, quel sens y a-t-il du reste de distinguer " *vérification* ... [et] démonstration "[143] ou preuve ? La « vérification » de Leibniz n'ignore d'ailleurs nullement la *récurrence*, dans la mesure où elle recourt à l'associativité de l'addition *en général*, impliquée dans son *Axiome* de l'égalité ou de la substitution des valeurs égales, tout au long de sa démarche. Pascal, qui a le premier clairement formulé le principe de récurrence, et Peano, qui l'a fomalisé, l'ont également rangé, à juste titre, dans la catégorie d'un "lemme" ou d'un "axiome"[144], soit dans celle d'un principe de raisonnement pleinement compatible avec le principe d'identité, plutôt que de le tenir, comme le fait Poincaré, pour une nouvelle modalité de déduction.

Cette récurrence immanente ou substituabilité suffit à assurer la généralisation et/ou l'unification des propriétés et théorèmes mathématiques, soit leur passage au rang de théorie, sans laquelle la science mathématique proprement dite n'existerait pas, se confondant alors avec un empilement ou une juxtaposition d'objets hétérogènes et de démonstrations sans rapport entre elles. Or l'essence de toute science gît précisément dans sa capacité à embrasser sous un seul regard ou théorie (gr. *theôria* : contemplation ou observation) des objets d'étude ou théorèmes (même racine en grec) apparemment disparates mais appartenant finalement à un même monde, celui de la pensée.

---

[141] vide supra I. A. 1. p. 6

[142] *R.D.E.* III p. 44

[143] *S.H.* 1[ère] p. ch. I. II p. 33 ; IV p. 38 ; VI p. 41 (cf. ch. III. p. 75) ; V p. 40 ; VII p. 43 ; III pp. 36-37 ; II p. 33 ; pour Kant cf. *C.R.P.* Introd. V. pp. 66-67 et Log. transc. chap. II. 3è sec. pp. 207-208

[144] Pascal, *T.T.A.* et Peano, *N.L.M.* ; vide supra B. p. 28 et H. Weyl, *Philosophie der Mathematik* p. 28

La *Théorie des groupes* (Galois), la *Théorie des ensembles* (Cantor) et la plus récente *Théorie des catégories* (Eilenberg et Mac Lane) illustrent amplement ce point, elles qui inscrivent le concept de nombre tout d'abord, puis tous les autres concepts mathématiques dans le mouvement généralisant ou universalisant constitutif du procès théorique tel quel. La première, selon le titre même du *Mémoire* de son inventeur, établira *les conditions de résolubilité des équations par radicaux,* en déterminant le groupe de permutations entre les racines d'une équation donnée, qui laisse invariable toute fonction rationnellement connue des racines. D'application générale, un tel procédé deviendra ultérieurement un opérateur commun à tous les « objets » mathématiques, et non seulement aux équations algébriques / numériques, et servira à les définir comme des groupes d'invariance pour une propriété quelconque. Ainsi le *Programme d'Erlangen* de F. Klein ordonnera les différentes géométries (euclidienne, non euclidienne, projective, topologie) en les subsumant chacune sous la catégorie des invariants d'un groupe de transformations (translations, projections, déformations).

Dépassant la simple détermination opératoire particulière, liée à la solution des équations, et revenant aux concepts clefs et aux notions liminaires de l'arithmétique, la seconde théorie, exposée par " Cantor ... ce mathématicien de génie " (Husserl[145]) dans les *Fondements d'une théorie générale des ensembles,* redessinera ou « révolutionnera » -mais au sens purement étymologique de ce mot-, les bases mêmes de celle-là, grâce à la catégorie d'*ensemble* que son auteur réexplicitera dialectiquement - platoniquement comme une multiplicité uni(fié)e (un multiple-un), id est comme une multiplicité régie par une *loi* qui assure la combinaison de ses éléments " en un tout ".

" *Théorie des ensembles*. Par ces mots je désigne un concept théorique très large, que jusqu'à présent, je n'ai tenté de développer que sous la forme spécialisée d'une théorie des systèmes arithmétiques ou géométriques. Par un « ensemble » ou « système », j'entends en effet de façon générale toute multiplicité qui peut être pensée comme une unité, c'est-à-dire toute collection d'éléments déterminés qui peut être par une loi combinée en un tout : je crois définir ainsi quelque chose d'apparenté à l'*εἶδος* ou *ἰδέα* platonicienne, ou aussi à ce que dans son dialogue *Philèbe ou le Souverain Bien*, Platon nomme *μικτόν*. Il oppose ce terme tout à la fois à *ἄπειρον*, c'est-à-dire l'illimité, l'indéterminé, ce que je nomme infini improprement dit, et au *πέρας*, cest-à-dire la limite ; il l'explique comme un « mélange » ordonné de ces deux derniers termes. Platon donne lui-même à entendre que ces concepts sont d'origine pythagoricienne ;" (Cantor)

Avec cette idée et celles qui lui sont connexes (cardinal, équipotence ou *puissance*, *numéra*l), il se donnera les moyens de repenser les différents ensembles de nombres et de construire du coup " un *nouveau* nombre "[146], le nombre infini, élément de l'ensemble ω ou $\aleph$ des transfinis.

Chemin faisant il croisera " des difficultés " que la Tradition avait déjà rencontrées, ce dès l'antiquité avec les fameux *Paradoxes de Zénon* et qu'elle avait cru pouvoir résoudre en réduisant l'infini à un infini seulement potentiel, soit plutôt à l'indéfini.

" C'est parce que la représentation ne l'épuise point que le nombre paraît être infini ; et les grandeurs mathématiques, et ce qui est hors du ciel. (...) Que la grandeur n'est pas infinie en acte, on l'a dit ; mais elle l'est par division, car il n'est pas difficile de ruiner les lignes insécables ; reste donc que l'infini est en puissance." (Aristote[147])

Les penseurs de l'âge classique buteront sur des obstacles similaires, et, tout en marquant une " *différence ... entre* indéfini *et* infini " (Descartes[148]) et en remettant en cause la validité de l'*Axiome 9* du *Premier Élément d'Euclide –" Le tout est plus grand que la partie "*-, ils se retrancheront néanmoins dans une forme de scepticisme.

" Car j'estime que les attributs d'*égal*, de *plus grand* ou de *plus petit*, ne conviennent pas aux infinis dont on ne peut pas dire que l'un soit par rapport à l'autre, ou plus grand ou plus petit ou égal. ... A mes yeux la seule issue

---

145 *Philo. de l’arithmétique* 1ère partie chap. VII. p. 140 n (1) ; cf. égal. *I.D.P.* I 3è sec. chap. III p. 327 (a)

146 *op. cit*. §§ 1 (note 1.), 7 et 11 pp. 35, 47 et 50 in *Cahiers pour l'Analyse* 10

147 *Phys.* III. 4. 203 b30 ; VI. 9. 239 b5 sq. (cf. égal. 2. 233 a21 ; VIII. 8. 263 a5) et III. 4. 203 b23 - 6. 206 a16 ; cf. égal. 7. 207 b 27-30 et *Méta*. K. 10

148 *P.P.* I. 27. p. 583 ; cf. égal. *M.M.* 1ères Rép. p. 352

possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini et le nombre de leurs racines pareillement ; que le total des nombres carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là, et, finalement, que les attributs *égal*, *plus grand* et *plus petit* n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies." (Galilée[149])

Lors de l'invention du calcul infinitésimal Leibniz retrouvera une nouvelle fois ces apories :
" Il y a certes deux labyrinthes de l'esprit humain ; l'un concerne la composition du continu, le second la nature de la liberté ; et ils prennent leur source à ce même infini."
Mais il préferera pareillement opter pour d'anciennes méthodes finitistes, moins risquées ou plus évidentes / intuitives :
" Il ne faut se fier aux raisonnements sur les séries infinies, que lorsqu'on en peut démontrer la vérité par les finies, à la façon d'Archimède." (idem[150])
Demeurant prisonniers d'une préconception ou représentation finie de l'infini, tous reculèrent ainsi devant leur propre découverte d'un infini réellement infini.

Affrontant les mêmes « étrangetés » que les Anciens et les Classiques, le fondateur de la *Théorie des ensembles* en débutera la « solution » là où ses prédecesseurs s'étaient arrêtés. Ne pouvant se satisfaire de leur réponse purement négative ou réductrice, soit de la position d'un infini en puissance, qualifié en un langage hégélien d'*" infini improprement dit "*, il lui substituera d'emblée un infini en acte et/ou déterminé, dénommé *" infini proprement dit "*. Ce faisant,il n'hésitera pas à bousculer certaines de nos habitudes mentales et à contester frontalement l'énoncé scolastique, inspiré d'Aristote, *" « infinitum actu non datur » "*, en définissant " un nombre infini comme déterminé et achevé ".

Contrairement à eux / nous, il assumera pleinement / sciemment son geste, ne craignant pas de parler d'une grandeur infinie déterminée.
"Ce que j'affirme et crois avoir démontré par le présent travail ainsi que par mes tentatives antérieures, c'est qu'après le fini, il existe un *transfinitum* (que l'on pourrait aussi nommer *suprafinitum*), c'est-à-dire une échelle illimitée de modes déterminés qui par nature ne sont pas finis, mais infinis, et qui cependant peuvent être précisés, tout comme le fini, par des *nombres* déterminés, bien définis et distinguables. Ma conviction est dès lors que le domaine des grandeurs définissables *n*'est *pas* clos avec des grandeurs finies et que les limites de notre connaissance peuvent être étendues en conséquence, sans qu'il soit nécessaire pour autant de faire violence à notre nature. A la place du principe aristotélicien et scolastique que j'ai discuté au paragraphe 4, je mets dès lors celui-ci : *Omnia seu finita seu infinita* definita *sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt*." (Cantor)
Il ne reniera pas pour autant entièrement la tradition, dont il ne cesse pour partie de se réclamer, que ce soit avec Platon, nous l'avons vu, ou avec Leibniz qui s'était déclaré, non sans une certaine inconséquence, " de la façon la moins équivoque *en faveur* de l'infini proprement dit ... « pour l'infini actuel » ". Il se reconnaîtra même un devancier direct en la personne de Bolzano qui "dans son ouvrage excellent et substantiel : *Les Paradoxes de l'Infini* ... [accordait aux] nombres proprement infinis quelque légitimité"[151].

Au total, et quelque soit le domaine mathématique visé (arithmétique finie ou infinie, analyse, géométrie), identité et diversité s'appellent l'une l'autre. Le Principe dit d'identité s'avère ainsi non exclusivement identitaire et donne raison de la progression de la Mathématique qui, autrement, se condamnerait à la stérile répétition du Même. Sans accorder à Kant que les jugements ou vérités mathématiques soient des propositions synthétiques a priori, il n'est pas interdit d'y retrouver une certaine dialecticité de la pensée. Seule celle-ci permet à celle-là, sinon d'articuler véritablement , du moins de combiner l'Un et le Multiple, en la tenant à égale distance de la pure tautologie et de la simple hétérogénéité.

149 *D.D.M.D.S.N.* I ; vide égal. Pascal, *Pensées* 233 et Kant, *H.G.N.T.C.* 3è partie in Oeuvres I. p. 100
150 *De la liberté* § 6 p. 380 et *Lettre à Varignon* 18 janv. 1713
151 *F.T.G.E.* §§ 1, 4, 5 et 7 pp. 35, 36, 41, 42, 43-44, 45 et 46

Quant à la troisième théorie, la *Théorie des catégories*, dont les commencements remontent à S. Eilenberg et S. Mac Lane et à leurs travaux sur la topologie algébrique ou sur l'algèbre homologique, et qui innervent la plupart des branches mathématiques aujourd'hui, elle pousse à son maximum l'intégration mathématique, en focalisant son attention non plus sur les classes, ensembles ou groupes, mais d'emblée sur les structures mathématiques et les relations qu'elles entretiennent. Mettant d'entrée l'accent sur les caractéristiques communes (*homomorphismes*) de celles-là et les fonctions qui les préservent (*foncteurs*), elle autorise l'établissement d'une axiomatique qui rend directement possible la généralisation de résultats obtenus à partir des axiomes d'une catégorie (structure) ; ce qui n'est somme toute que l'explicitation ou la réalisation, la plus achevée à ce jour, de ce qui habitait potentiellement, de tout temps, le principe de récurrence.

Cette identité et/ou récurrence suffit donc bien à intro-duire/dé-duire toutes les catégorie ou les notions mathématiques, l'infini inclus, celui-ci étant, nous l'avons maintes fois souligné, supposé dès le point de départ. Il convient uniquement de s'entendre sur ce que l'on doit appeler tel pour s'en rendre compte. Aidons-nous pour cela des réflexions de Dedekind en son § 5 **Le fini et l'infini** de *Ce que sont et doivent être les nombres ?* Celles-ci commencent, comme il se doit en mathématique, par une définition ou un *éclaircissement* qui s'avère fort proche, aux dires mêmes de l'auteur, de la détermination cantorienne de l'infini[152]. Partant il s'inscrira pareillement et d'emblée en faux contre l'*Axiome 9* du *Premier Élément d'Euclide –" Le tout est plus grand que la partie "*- et dénommera infini précisément un système équivalent ou semblable à ses parties, comme l'ensemble des entiers l'est à celui des pairs ou l'ensemble des nombres à celui des carrés.

" Un système *S* **s'appelle** infini quand il **est semblable** à une de ses parties propres ; dans le cas opposé, *S* s'appelle un système fini." (Dedekind)

Reste, au-delà de leur définition et d'exemples toujours particuliers et discutables, à fonder ou prouver en nécessité et universalité l'existence effective de tels systèmes : c'est à quoi s'emploiera la démonstration de la proposition 66.

" Proposition. Il y a des systèmes infinis."

Et elle montrera qu'à tout élément *s* (idée ou pensée) de l'ensemble *S*, " Mon monde des idées (*meine Gedankwelt*) " –tout ce que Je puis penser-, on peut faire correspondre un élément *s'* (idée de l'idée) de l'ensemble *S'* qui réfléchit le précédent –Je puis penser (réfléchir) tout ce que je pense- et qui pourtant n'en est qu'une partie, toutes mes pensées, y compris donc les pensées de mes pensées faisant partie de " la totalité *S* de toutes les choses qui peuvent être objet de ma pensée (*meines Denkens*) ". Celle-ci ne cesse pas pour autant d'être ce qu'elle est, une " totalité ", englobant ses parties, puisqu'elle inclut en elle des éléments, en vérité un seul, " mon propre Je (*mein eigenes Ich*) " qui, tout en étant un être de pensée et donc un élément appartenant à *S*, ne saurait néanmoins être l'objet d'une idée déterminée (*s'*) : le Je ne peut être assimilé à une idée objective particulière-, puisqu'il les excède toutes, étant le Sujet même qui les pense chacunes, et en tant que tel il n'appartient pas à la partie *S'* de *S*.

Il y a ainsi congruence, mais non identité, dans l'univers de la pensée entre la partie (*S'*) et le tout (*S*), ce qui répond au réquisit de la définition de l'infinité. D'où il ressort que " la totalité *S* de toutes les choses qui peuvent être l'objet de ma pensée ", dont je Je est un élément, est bien infinie et qu'elle existe, aussi sûrement qu'existe notre pensée.

" Démonstration). Mon monde des idées, *i.e.* la totalité *S* de toutes les choses qui peuvent être objet de ma pensée, est infini. Car si *s* est un élément de *S*, l'idée *s'*, que *s* peut être objet de ma pensée, est elle-même un élément de *S*. Si l'on considère s' comme l'image $\varphi(s)$ de l'élément *s*, l'application φ de *S*, ainsi définie, a la propriété que l'image *S'* est une partie propre de *S* ; et en effet, *S'* est une partie propre de *S*, car il y a dans *S* des

[152] vide supra B. pp. 30-31

éléments (par exemple mon propre Je) qui sont distincts de toute idée *s'* de ce genre et pour cette raison ne sont pas contenus dans *S'*. Enfin, il est clair que si *a*, *b*, sont des éléments différents de *S*, leurs images *a'*, *b'* sont aussi différentes, donc que l'application φ est une application précise (semblable). Par conséquent *S* est infini."

(Dedekind)

Ce raisonnement ressemble, on l'aura remarqué, au *Cogito* cartésien, car il revient, à l'instar de ce dernier, à partir de l'expérience personnelle de la pensée –"Mon monde des idées"- et à prendre appui, au-delà des idées des choses (mondaines), sur une instance transcendante (transmondaine), le *Je* -"mon propre Je"- qui, tout en faisant partie de l'univers de la pensée -l'"objet de ma pensée", ne se confond aucunement avec *telle* idée ou idée de l'idée -"le Je lui-même n'est nullement une idée"[153]-, puisqu'elle les transgresse toutes, à titre de leur condition de possibilité. En quoi elle est proprement infinie. Et, tout comme chez Descartes, l'infinité ici en cause n'est nullement, en dépit des apparences, dérivée mais absolument Première. Car elle ne procède pas du fini mais le précède, toute idée ou pensée objective présupposant le Je ou le Penser subjectif qui la pense. " *Mon* monde des idées " n'est affirmable que grâce au *Je* qui qui le conçoit, car en l'absence de ce dernier, le monde des idées ne pourrait être dit *mien*, et partant, faute d'unité, un tel monde ne serait plus celui des idées –unités intelligibles liées entre elles, mais un chaos d'impressions.

En définitive toutes les vérités mathématiques, qu'elles concernent l'infini, le fini ou une notion géométrique (triangle) ou arithmétique (nombre) quelconque, résident en nous et leur démonstration revient à une explicitation de ce que nous portons ou savons déjà mais qui demande à être vérifié pour acquérir le statut de quelque chose de prouvé (scientifique).

" Toutes les choses, dont la connaissance est dite mise en nous par la nature, ne sont pas pour cela explicitement connues de nous; mais seulement elles sont telles que nous les puissions connaître, sans aucune expérience des sens, par les forces de notre propre intelligence (…) C'est pourquoi, selon Platon, Socrate, en interrogeant un enfant sur les éléments de la géométrie, et obtenant ainsi que cet enfant tirât de son propre esprit des vérités qu'il n'avait pas remarquées en lui auparavant, s'efforçait de prouver sa théorie de la réminiscence." (Descartes[154])

N'est-ce pas précisément à propos de la connaissance mathématique que Platon invoque sa *théorie de la réminiscence*[155] ?

Nul philosophe ne le contredira sur ce point, à commencer par son élève et néanmoins virulent critique parfois, Aristote :

" Tout enseignement donné ou reçu par la voie du raisonnement vient d'une connaissance préexistante. Cela est manifeste, quelque soit l'enseignement considéré : les sciences mathématiques s'acquièrent de cette façon, ainsi que chacun des autres arts."

A l'origine des principes et/ou des sciences, il admettra "quelque puissance de les acquérir"[156]. Leibniz le prolongera et, tout en acquiesçant à " la réminiscence des Platoniciens ", répétera quasiment Descartes :

" Dans ce sens on doit dire que toute l'arithmétique et toute la géométrie sont innées et sont en nous d'une manière virtuelle, en sorte qu'on les y peut trouver en considérant attentivement et rangeant ce qu'on a déjà dans l'esprit, sans se servir d'aucune vérité apprise par l'expérience ou par la tradition d'autrui, comme Platon l'a montré dans un dialogue, où il introduit Socrate menant un enfant à des vérités abstruses par les seules interrogations sans rien lui apprendre."

La réminiscence connote simplement le caractère apriorique du savoir mathématique.

A la limite on pourrait concevoir une *Mathesis* entièrement pure qui déroulerait de façon entièrement auto-nome (libre), id est sous la seule autorité de la Raison, ses théorèmes, et qui se pratiquerait donc quasi hors du monde.

---

[153] *W.S.W.S.Z.* § 5 64.; 66. et *Sur le concept de l'infini* in Sinaceur, *L'infini et les nombres R.H.S.* 24 pp. 251-278; vide égal Bolzano, *Les Paradoxes de l'infini* § 13 in *L.F.M.* p. 64

[154] *Épître à Voetius* in O. ph. p. 30 et vide Commentaire *Méds*. I et II in Cours II. 5. Psychologie II. 2. C. Pensée

[155] cf. *Phédon* 75 cd ; 76 a et *Ménon* 81 d - 98 a et vide Cours Introd. gale 3. C. b. p. 58

[156] *Anal. Post.* I. 1. 71 a 1-5 et II. 19. 99 b 30-35)

" On peut donc se fabriquer ces sciences dans son cabinet et même à yeux clos, sans apprendre par la vue ni même par l'attouchement les vérités dont on a besoin ; quoiqu'il soit vrai qu'on n'envisagerait pas les idées dont il s'agit si l'on avait jamais rien vu ni touché." [157]

Celle-ci, recourant aux seuls "yeux de l'esprit ... les démonstrations" (Spinoza[158]), déchiffrerait à même ce dernier les mystères des figures ou des nombres et équivaudrait à la pure Logique.

En résumé : les définitions appellent les axiomes et réciproquement et tous deux requièrent les démonstrations. Mais étant donné que ces dernières se basent, à leur tour, sur les premiers, demeure l'« énigme » de ceux-ci. Bien qu'elle apparaisse comme une totalité close et qui ne devrait son être qu'à soi, la Mathématique reste suspendue à la validité de ses axiomes, dont l'étude ne saurait plus relever d'elle-même mais bien d'une autre science. Sa vérité s'avérerait ainsi conditionnelle, relative à justesse qu'établira la discipline censée prendre en charge les présuppositions dont elle part. Et selon ce que révélera cette autre étude, l'on se prononcera sur l'exacte portée d'une Science, tenue par les uns –Descartes, Spinoza, Leibniz- pour indépassable ou suprême, et par d'autres –Platon, Aristote, Kant, Hegel- pour auxiliaire ou secondaire, simple propédeutique à la vérité et non son contenu[159]. En fait, et nous le vérifierons bientôt, ce partage est beaucoup moins tranché que cela.

Or puisque les premières propositions mathématiques n'énoncent que des relations logiques, il appartiendra à la Logique de légiférer sur leur pertinence. C'est donc dans la Logique que l'on cherchera le secret de la *Mathesis*.

" Les *axiomes*, pour les mentionner à la même occasion, font partie de la même classe [celle de déterminations (qui sont) des *présuppositions* (et forment ainsi) le *premier* relatif]. C'est à tort qu'on les considère généralement comme des *premiers* absolus, comme s'ils n'avaient pas besoin, en-et-pour-soi, de démonstration. S'il en était vraiment ainsi, ils seraient de simples tautologies, car c'est seulement dans l'identité abstraite qu'aucune différence n'existe, et c'est seulement elle qui n'a pas besoin de médiation. Si donc les axiomes sont quelque chose de plus que de simples tautologies, ils ne peuvent être que des *propositions* faisant partie d'*une quelconque autre science*, parce qu'ils ne peuvent être des présuppositions que pour la science à laquelle ils doivent servir d'axiomes. Ce sont donc, à proprement parler, des *propositions*, et des propositions empruntées le plus souvent à la Logique. Les axiomes de la géométrie sont des lemmes de ce genre, des propositions logiques, qui se rapprochent d'ailleurs des tautologies par le fait qu'elles ne se rapportent qu'à la grandeur et que les différences purement qualitatives en sont exclues ;" (Hegel[160])

Aussi interrogeons le rapport entre Mathématique et Logique pour clore notre investigation sur la Science mathématique et son statut.

3. Logique et Mathématique

La co-hérence, co-hésion ou unité des définitions, axiomes, et théorèmes et leur commune dépendance de certains principes de raisonnement, donne à la Mathématique son caractère logique / systématique qui autorise à parler de la " *Logica Mathematicorum* " (Leibniz[161]). Seule une telle Logique confère à cette science sa dignité de « Science ». D'où le lien étroit entre ces deux disciplines, au point que moult logiciens et/ou mathématiciens ont été jusqu'à les assimiler l'une à l'autre.

" J'espère avoir dans cet écrit rendu vraisemblable l'idée que les lois de l'arithmétique sont des jugements analytiques et par conséquent *a priori*. L'arithmétique serait donc simplement une logique développée, et chaque proposition arithmétique une loi logique, bien que dérivée (...) l'arithmétique est une branche de la logique pure."

(Frege[162])

---

[157] *N.E.* Préf. p. 37 (cf. égal. *D.M.* XXVI.) et I. I. § 6 p. 62 ; cf. égal. IV. IV. § 4 p. 345

[158] *É.* V. Prop. XXIII Scolie p. 582 ; vide supra I. B. 1. p. 11

[159] vide supra Introduction pp. 3-4

[160] *S.L.* III. 3è sec. chap. II A. b) 3. pp. 528-529

[161] in Écrits maths. VII p. 54 éd. Pertz, cité par Husserl, *R.L.* Proleg. chap. X § 60 p. 246 (1)

[162] *F.A.* 5. Conclusion 87. p. 211 et *P.A.* Introduction in Belna p. 343

Déjà lors de l'analyse des définitions, particulièrement celle du nombre, nous avons eu l'occasion de noter l'indépendance de ce dernier par rapport à toute donnée sensible et sa subordination à des catégories purement logiques.

" En ne définissant l'arithmétique (algèbre, analyse) que comme une partie de la logique, je proclame déjà que je tiens le concept de nombre pour totalement indépendant des représentations ou intuitions de l'espace et du temps, et que j'y vois plutôt une émanation immédiate des pures lois de la pensée." (Dedekind[163])

Davantage encore au cours de l'examen des axiomes et des démonstrations, avons-nous pu souligner l'intervention permanente des règles logiques (identité, égalité etc.) dans la voie ou la méthode (gr. meta-*odos* : voie) suivie par les mathématiciens ; de sorte que l'identification de la Mathématique à la Logique, pour moderne qu'elle se prétende, semble aller de soi.

" Le fait que toutes les mathématiques appartiennent à la logique symbolique est une des plus grandes découvertes de notre époque ; et une fois ce fait établi, l'étude des principes des mathématiques ne consiste plus que dans l'analyse de la logique symbolique elle-même." (Russel)

D'ailleurs l'une comme l'autre opèrent sur des termes symboliques et non des êtres tangibles, et ne s'intéressent qu'aux relations purement logiques qu'entretiennent ceux-là et non à leur signification ou valeur intrinsèque.

" Cela ne fait que montrer que le principe général d'après lequel ce qui importe aux mathématiques, et en grande partie aux sciences physiques, n'est pas la nature intrinsèque des termes mais la nature logique de leurs liaisons entre eux. Nous pouvons dire, de deux relations semblables, qu'elles ont même structure. Pour les usages mathématiques (sauf pour ceux de la philosophie pure), la chose importante pour une relation n'est pas sa nature intrinsèque, mais sa valeur dans les divers cas." (idem)

Elles partagent ainsi un objet ou un but commun, l'appréhension des formes de la pensée, à l'exclusion de toute considération du contenu ou de la substance.

" La logique (ou les mathématiques) ne s'occupe que des *formes* " (idem[164]).

Bien avant, Aristote ne disait pas autre chose :

" En effet, les Mathématiques s'occupent seulement des formes "[165].

On se tournera donc résolument du côté des *Analytiques* ou de la Logique, pour appréhender la Mathématique à son état natif (originaire) et en son fonctionnement effectif (scientifique). Mais de quelle Logique au juste s'agit-il ici ? Nous verrons en effet, nous l'avons même déjà suggéré, que celle-ci ne véhicule pas un sens univoque[166].

L'initiateur de la *Théorie des ensembles*, "Cantor ... ce mathématicien de génie" (Husserl[167]), sur l'oeuvre duquel s'est construite de manière inexpugnable la Mathématique moderne : -"Du paradis que Cantor a crée pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser" (D. Hilbert[168])-, ayant esquissé une vue synthétique du développement ou de la recherche mathématique, on en suivra volontiers l'exposé pas à pas[169]. Avec lui on rappellera d'entrée de jeu la pleine liberté, c'est-à-dire pureté de celle-ci, soit son indépendance par rapport à tout matériau imposé de l'extérieur. Mais, comme en politique, être libre ne saurait vouloir dire n'être obligé par rien. Au contraire la liberté implique la loi, sous peine de se confondre avec l'arbitraire ou la licence. Et dans le cas précis l'obligation revient à l'impératif de respecter des règles de raisonnement, en l'occurence la règle de non-contradiction et celle de la compatibilité ou corrélation des différentes notions et donc des définitions qui les soutiennent.

---

[163] *Que sont et que doivent être les nombres* Préf. 1ère éd. p. 65

[164] *The principles* § 4 (cf. égal. *I.P.M.* chap. III. p. 38 et chap. XVIII.) ; *I.P.M.* VI. p. 78 et XVIII. p. 237 ; vide égal. Bourbaki, *L'architecture des maths.* in F. Le Lionnais, *G.C.P.M.* pp. 40 et 46

[165] *Org., Les 2nds Analytiques* I. 13. 79 a 8 et vide supra I. B. 1. p. 12

[166] vide supra 2. A. p. 21 et B. p. 30

[167] *Philo. de l'arithmétique* 1ère partie chap. VII. p. 140 n (1)

[168] *Grundlagen der Geometrie* p. 274 7è éd. Leipzig-Berlin (Teubner 1930) in Bourbaki pp. 51-52 ou *Sur l'infini* (1925) trad. fr. in J. Largeault, *Logique mathématique Textes* p. 227

[169] **Texte** in *F.T.G.E.* § 8 (1883) in *Cahiers pour l'Analyse* 10 1969 pp. 48-49 (*G.A.* pp. 182-183, Berlin, 1932) ; cf. égal. *Lettre à M.-Leffler* 26 janv. 1884 in A. Schoenflies, *Die Krisis in Cantors mat. Schr., A. M.* 50 1928

" La mathématique est pleinement libre dans son développement, et ne connaît qu'une seule obligation (et sur un point qui va de soi) : ses concepts doivent être non contradictoires en eux-mêmes , et soutenir d'autre part avec les concepts formés antérieurement, déjà présents et assurés, des relations fixes, réglées par des définitions."

Ces deux règles prescrivant en fait le Même : l'ordre de la cohérence ou de la non contra-diction entre les énoncés, garant de la con-sistance du propos mathématique, on considérera le Principe (de non-contradiction) qui les résume, comme l'unique norme du discours mathématique. Après Parménide, Platon nous en a laissé la plus exacte des formulations.

" Il est impossible au même sujet de juger en sens contraire sur les mêmes objets dans le même temps."[170]

Et son disciple, Aristote, l'envisagera comme la base indépassable de tout raisonnement.

" J'appelle principes de la démonstration les opinions communes sur lesquelles tout le monde se base pour démontrer, par exemple, que *toute chose doit nécessairement être affirmée ou niée*, et qu'*il est impossible qu'une chose soit et ne soit pas en même temps*, ainsi que toutes les autres prémisses de ce genre."

Il s'agirait là, selon lui, de l'" ultime vérité " de toute démonstration ou discours logique.

" *Il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps au même sujet et sur le même rapport* ... Voilà donc le plus ferme de tous les principes, car il répond à la définition donnée plus haut. Il n'est pas possible, en effet, de concevoir jamais que la même chose est et n'est pas, comme certains croient qu'HERACLITE le dit : car tout ce qu'on dit, on n'est pas obligé de le penser. ... C'est la raison pour laquelle toute démonstration se ramène à ce principe comme à une ultime vérité, car, il est, par nature, un point de départ, même pour tous les autres axiomes."

Voudrait-on fournir une démonstration de ce Principe que l'on tomberait dans un cercle vicieux, présupposant, pour établir cette preuve, cela même que l'on prétend vérifier.

" Le principe, suivant lequel il est impossible d'affirmer et de nier en même temps un prédicat d'un sujet, n'est posé par aucune démonstration, à moins qu'il ne faille démontrer aussi la conclusion sous cette forme." (idem)

Tout au plus en proposera-t-on "une démonstration qui procède par réduction à l'absurde", montrant par là même qu'il forme bien l'Axiome évident et incontournable de toute pensée.

Toute démonstration (scientifique) nécessite, semble-t-il, une base, un point de départ ou un support lui-même indémontrable et sans lequel elle ne pourrait ni se produire ni progresser.

" La démonstration part d'un principe, et a en quelque sorte pour fin le syllogisme ou la conclusion ; et même si les démonstrations ne sont pas limitées, du moins ne reviennent-elles pas sur elles-mêmes dans la direction du principe, mais par l'adjonction successive d'un moyen et d'un extrême, elles s'avancent en ligne droite." (idem)

La démarche ou méthode scientifique s'avère ainsi purement *analytique*, ne progressant que par l'analyse/la décomposition des propositions préliminaires. Toute tentative de « démontrer » celles-ci s'engagerait fatalement dans une régression à l'infini vaine ou, ce qui ne vaudrait guère mieux, s'enfermerait dans un cercle ou une tautologie vide.

" Et qu'il soit impossible que la démonstration au sens absolu soit circulaire, c'est évident puisque la démonstration doit partir de principes antérieurs à la conclusion et plus connus qu'elle." (idem)

Pour éviter un tel cercle vicieux ou " une pétition de principe ", on ne cherchera pas à justifier scientifiquement les principes mais l'on se contentera de les accepter ou intuitionner.

" Des principes il n'y aura pas science ... c'est une intuition qui appréhendera les principes." (idem[171])

D'autres, tel Leibniz, lui emboîteront le pas et tiendront pareillement le Principe de non-contradiction pour le fondement des mathématiques tout d'abord.

" Le grand fondement des mathématiques est le principe de la contradiction ou de l'identité, c'est-à-dire qu'une énonciation ne saurait être vraie et fausse en même temps ; et qu'ainsi A est A, et ne saurait être non A. Et ce seul principe suffit pour démontrer toute l'arithmétique et toute la géométrie, c'est-à-dire tous les principes mathématiques."

Tous les principes de cette science, dont la transitivité hors laquelle nulle déduction certaine ne serait possible, n'en seraient que des corollaires.

" Car ce principe [A=B et C=B → A=C] est une suite immédiate de celui de contradiction et fait le fondement de toute la logique ; et s'il cesse, il n'y a pas moyen de raisonner avec certitude."

---

[170] *Rép.* X. 602 e ; cf. égal. IV. 436 bc

[171] *Méta*. B. 2. 996 b 27-30 ; Γ 3. 1005 b 20-34 et *2^nds^ Anal.* I. 11. 77a 10 et 22 ; *De l'âme* I. 3. 407 a ; *2^nds^ Anal*. 3. 72 b ; II. 4. 91a et 19. 100 b

Puis l'auteur des *Nouveaux essais sur l'entendement humain* y verra le roc auquel s'adosserait l'ensemble du savoir en général, le soubassement de toute notre connaissance, autant dire l'unique *principe primitif* ou le *principe des principes*, que l'on peut dénommer indifféremment principe de non-contradiction ou d'identité, celle-ci n'étant qu'une suite de celle-là : A = A que parce que A ≠ B (-A).

" le seul principe primitif, qui est celui de la contradiction et qui ne suppose rien. (...) Le principe des principes est en quelque façon le bon usage des idées et des expériences ; mais en l'approfondissant, on trouvera qu'à l'égard des idées, ce n'est autre chose que de lier les définitions par le moyen des axiomes identiques."

Conséquemment il interprétera le langage mathématique, qui repose de fait sur lui, comme l'instrument ou l'*organon*, selon la terminologie péripatéticienne, universel de tous les langages prétendant à la vérité.

" Et cependant, le croiriez-vous ? je tiens que l'invention de la forme des syllogismes est une des plus belles de l'esprit humain, et même des plus considérables. C'est une espèce de *mathématique universelle* dont l'importance n'est pas assez connue ; et l'on peut dire qu'un *art d'infaillibilité* y est contenu, pourvu qu'on sache et qu'on puisse s'en bien servir, ce qui n'est pas toujours permis."[172]

Nous aurons à nous prononcer ultérieurement sur cette généralisation.

Pour l'instant et pour revenir à la mathématique stricto sensu, on notera qu'en elle le Principe de non-contradiction convient en effet parfaitement à ses constructions, dans la mesure où il suffit à répondre à sa seule requête, celle de produire des énoncés ou « objets » définis/ distincts/ précis (*identifiables*) et conciliables ou liés entre eux (*non-contradictoires*). Ce qui est précisément le cas des différents nombres (rationnels, irrationnels, complexes) dont la distinction n'empêche point la relation, issus qu'ils sont les uns des autres, et trouvant tous, on l'a dit, leur source dans les nombres entiers positifs dont ils forment des extensions ou des généralisations opératoires.

Tel est l'unique critère d'existence en mathématique qui assure aux premiers la même réalité ou vérité (logique) qu'aux derniers, sans qu'il soit besoin d'une autre preuve.

" En particulier, pour pouvoir introduire de nouveaux nombres, elle est seulement requise d'en donner des définitions leur conférant une précision et le cas échéant une relation aux anciens nombres telles que l'on puisse dans des cas donnés les distinguer les uns des autres de manière déterminée. Dès qu'un nombre satisfait à toutes ces conditions, il peut et doit être considéré comme existant et réel dans la mathématique. Je vois dans ce fait la raison indiquée par allusion au paragraphe 4, pour laquelle on doit accorder aux nombres rationnels, irrationnels et complexes tout autant d'existence qu'aux nombres entiers positifs finis."

Réclamer une justification supplémentaire, qui ne pourrait être ici qu'extra-logique, conduirait à l'oubli de l'essence même du mathématique, sa nature a priori ou pure.

Nul danger au demeurant qu'une telle procédure débouche sur l'arbitraire, et partant à la ruine de la rigueur ou scientificité mathématique, puisque la Règle déjà énoncée encadre l'activité du mathématicien et lui enjoint un rigorisme épistémologique incompatible avec le moindre laisser-aller intellectuel. Aussi on ne doit pas craindre d'« ajouter » à la liste des nombres de nouveaux nombres, en l'occurence les transfinis ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., $\omega + \nu$, ... ; 2ω, $2\omega + 1$, $2\omega + 2$, ..., $2\omega + \nu$, ... ; 3ω, $3\omega + 1$, ..., $3\omega + \nu$, ... $\mu\omega$, $\mu\omega + 1$, ..., $\mu\omega + \nu$, ... Pour peu qu'ils répondent à l'exigence logique élémentaire, comme c'est bien le cas, on ne saurait leur dénier droit de cité dans le monde des mathématiciens. De surcroît, et à suposer que, chemin faisant, on rencontre des nombres ou autres entités tératologiques ou entièrement vides, ils seront soit apprivoisés, comme ce fut le cas des irrationnels, des imaginaires ou des fonctions non continues et cesseront du coup d'apparaître comme des monstruosités logiques, soit purement et simplement abandonnés pour manque d'intérêt mathématique.

[172] *2nd Ecrit à Clarke* 1) in Œuvres p. 411 (vide égal. Husserl, *L.F.L.T.* 1ère Sec. B) chap. V. § 52 p. 189) ; *Essais de théodicée* Discours § 22. p. 67 et *N.E.* IV. II. § 1. p. 320 - IV. XII. § 6. p. 399 et XVII. § 4. p. 425

" Il n’est pas nécessaire, je crois, de redouter de ces principes aucun danger pour la science, comme le font bien des gens ; d’une part les conditions que j’ai dites et sans l’observation desquelles la liberté de former des nombres ne peut être mise en exercice, sont telles qu’elles ne laissent à l’arbitraire qu’une place extrêmement réduite ; ensuite tout concept mathématique porte en lui-même son correctif nécessaire ; s’il est stérile ou inadéquat, il le manifeste très vite par son peu d’usage, et il est alors abandonné pour manque d’efficacité."

Mais comme nul ne saurait présager du destin final des êtres mathématiques, il serait à la fois dangereux pour l'évolution de cette science, et surtout contraire à sa définition de vouloir lui imposer des contraintes ou limites autres que celles qu'elle s'oblige elle-même à respecter, à savoir, encore une fois, le seul Principe de non-contradiction.
" En revanche toute restriction superflue imposée à l’appétit de recherche mathématique me paraît comporter un danger bien plus grave, d’autant plus grave que l’on ne peut de l’essence de la science rien tirer qui la justifie."
Celle-ci ne requiert aucune vérification empirique, intuitive, pratique ou de quelque autre nom qu'on veuille la baptiser. Elle se meut exclusivement dans la sphère intelligible ou logique, normée par la seule déduction rationnelle.

Répondant d'elle-même, la Mathématique serait ainsi foncièrement auto-nome ou libre.
" Car l’*essence* de la *mathématique* réside précisément dans sa *liberté*."
Aussi on parlera indifféremment " de *mathématiques libres* ... [ou] pures "[173]. La Mathesis s'avère ainsi bien " une science normative "(Frege[174]), animée par l'Idéal de Liberté propre à toute éthique véritable. Et, comme en celle-ci, ce dernier n'a rien de commun avec " la conviction ordinaire du vulgaire " ni avec celle du « libéralisme » qui n'en forme que le prolongement et qui toutes deux identifient liberté et laisser-aller ou faire, alors que la liberté mathématique, à l'instar de la vraie liberté, unifie celle-ci avec "la prescription de la loi divine [rationnelle]" (Spinoza[175]). Rien d'étonnant que la *Mathesis* ait été développée, sinon inventée, dans la patrie de la *Démocratie* ou de la *Liberté et Égalité*, la Grèce[176]. Seule une Cité habitée par un Idéal de justice ou de justification, valable en droit pour tous, pouvait en effet tolérer en son sein une Discipline exigeant argumentation ou démonstration commune qui, en retour fortifiait son exigence d’universalité.

Tout en incarnant / traduisant cet Idéal dès son début, la science mathématique l'exprime de de mieux en mieux lors de son histoire, en « réduisant » toujours davantage la substantialité des êtres, apparemment donnés (lignes, nombres, mouvements), auxquels elle se rapporte, pour n'en retenir que les relations logiques (égalité, inégalité, ordre) posées par elle-même et valables indistinctement ou universellement pour tous.
" Mais à présent, la preuve est universelle, car ce n’est pas en tant que lignes ou que nombres que ces notions possèdent l’attribut en question, mais en tant que manifestant le caractère qu’elles sont supposées posséder universellement."
(Aristote[177])
Telle est la direction de l'évolution de la connaissance mathématique qui emprunte le sens de la plus grande « abstraction » possible : des êtres aux opérations et de celle-ci à leur groupe puis à leur ensemble, pour nous limiter à une séquence déjà remarquée[178].

Absorbant progressivement en elle le tissu même du monde qu'elle enserre dans les mailles de ses propres formules, elle tend à unifier sous son égide toutes les sciences et à se transformer en la Science des sciences : la Logique, Mathématique ou Science universelle.

---

173 cf. *op. cit.* § 11 p. 50 et *G.A.M.L.* § 8
174 *Nachgelassene Schriften*, 1897 in Belna p. 214 ; vide supra 2. A. p. 20
175 *Éth*. V. XLI Scolie p. 594
176 vide Cours Introd. g[ale] 1. pp. 5-6
177 *Organon, Anal. Post.* I. 5. 74 a 23-25
178 vide supra 2. B. pp. 29-30

" Mais, puisqu'il est manifeste que les mêmes principes dominent les mathématiques et toutes les choses qui sont, de même que nous avons considéré que les principes qui leur sont communs s'étendent à toutes les espèces mathématiques, nous considérerons analogiquement que leurs théorèmes sont aussi communs, simples et les produits d'une seule science qui fait résider simultanément toutes les connaissances mathématiques dans une seule, et nous examinerons de quelle manière ces théorèmes s'appliquent à toutes ces connaissances et peuvent être considérées dans les nombres, les grandeurs et les mouvements." (Proclus[179])

Énonçant " l'ordre et la mesure " ou " les proportions ou les rapports des choses ", indépendamment du contenu spécifique de chacune, elle s'intitulerait " d'un nom déjà ancien, mathématique [science] universelle, ... [dont] les autres sciences sont dites des parties " (Descartes). Et il lui échoirait de dire le Logos de l'Être.

Est-ce un hasard si la Mathématique ne figure même pas sur l'" arbre " du savoir cartésien ou son absence ne serait-elle pas la marque de son omni-présence, le signe qu'elle ne se réduirait point à <u>une</u> science parmi d'autres mais devrait être considérée comme <u>la</u> science ?

" On ne saurait rien souhaiter de plus en matière de philosophie que d'en pouvoir donner une démonstration mathématique." (Descartes[180])

" Ma métaphysique est toute mathématique, pour ainsi dire ou pourrait le devenir. » (Leibniz[181])

" La métaphysique n'a aucun principe, formel ou matériel, qui soit d'une autre espèce que ceux de la géométrie. Ici et là, le fondement des jugements est régi par les principes d'identité et de contradiction ; ici et là, il y a des propositions indémontrables qui constituent les fondements des raisonnements." (Kant[182])

Plutôt que de concerner des objets particuliers, elle se rapporterait à la Forme générale de tout.

En quoi elle se montre proche parente de l'Art qui s'intéresse davantage à la cohérence ou l'harmonie du Tout qu'au détail des sujets figurant dans les tableaux, pièces, poèmes ou récits qu'il crée. Les grands mathématiciens se sont tous réclamé d'un " sentiment esthétique ".

"Ce serait oublier le sentiment de la beauté mathématique, de l'harmonie des nombres et des formes, de l'élégance géométrique. C'est un vrai sentiment esthétique que tous les vrais mathématiciens connaissent." (Poincaré[183])

Les oeuvres esthétiques n'obéissent-elles pas du reste à des normes mathématiques de composition (formes géométriques pour la peinture, calculs harmoniques pour la musique, métrique pour la poésie ou littérature) ?

" Les formes les plus hautes du Beau sont l'ordre, la symétrie, le défini, et c'est là surtout ce que font apparaître les sciences mathématiques." (Aristote[184])

L'intérêt des mathématiciens pour les arts, la musique en particulier, et réciproquement, n'a assurément rien de fortuit[185].

Et puisque l'art musical trahit quelque chose du mystère divin –" la proportion ... [notre offrande] au chœur bienheureux des Muses " (Platon)-, on rapprochera également la Mathématique de la Religion voire de la Sagesse.

" Quoi qu'il en soit, ce qu'il [Dieu] nous a donné simultanément, dirons-nous, avec le nombre en général, c'est toute la pensée, ainsi que le reste des biens ; (...) Dieu ... leur [aux éléments] donna une configuration au moyen des formes et des nombres " (idem[186]).

" Les spéculations ... [ou] rapports harmoniques " (Kepler) nous révéleraient ainsi l'*Harmonie du Monde* et/ou le *Mystère cosmographique, De l'Admirable Proportion des Orbes Célestes*, répondant au plan de l'Architecte divin[187], déjà dévoilé pour partie par Platon. Bien comprise,

---

179 *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide* pp. 4-5

180 *R.D.E.* IV. pp. 50-51 ; VI. p. 55 ; *P.P. Lettre-Préf.* p. 566 (cf. *D.M.* 2è p. pp. 138-139 ; Comte, *C.P.P.* 1. p. 61 Cournot, *O.L.C.A.G* p. 355 et supra Introd. p. 3) et *Let. à Mers.* 30/8/1640 (cf. *A Huygens* 07/1640 p. 1073)

181 *Lettre à L'Hôpital* 27 déc. 1694

182 *R.É.P.T.N.M.* Consid. 3è § 3 p. 55 ; cf. égal. Fichte, *Lettre à Wlöemer* nov. 1973 in G.A. III, 2, 14-17 et Hegel, *Lettre 167. à Sinclair* in Corr. I p. 296

183 *S.M.* chap. III p. 53

184 *Méta*. M. 3. 1078b1 ; vide égal. Platon, *Timée* 54 a

185 cf. Pythagore in Platon, *Rép.* VII 531 abc et *Ép.* 978 a ; Descartes, *Abrégé de musique* et Leibniz, *P.N.G.* 17.

186 *Ép.* 991b et 977b – *Tim.* 53b ; cf. *Rép.* VII. 522c, X. 603a ; *Lois* VII. 818c, 821b et Cours Introd. g[ale] 3. B. 1.

187 *H.M.* 1. V. chap. III. in G.W. p. 296 sq.

la foi religieuse ne récuse nullement une telle proximité, elle qui nous enseigne dans la *Bible* (*Ancien Testament*, *Livre de la Sagesse*) que la « création » relève de critères mathématiques.
" Dieu nous a enseigné qu'il avait disposé toutes choses en nombre, poids et mesure." (Descartes[188])

Conclura-t-on finalement que la *Mathesis* profère l'Ultime Vérité de/du Tout et qu'elle est la Science suprême, comme ne cessent de le clamer les Modernes, anciens ou contemporains qui ne jurent que par elle ?
" Mais les mathématiques sont devenues pour les modernes, toute la Philosophie, quoiqu'ils disent qu'on ne devrait les cultiver qu'en vue du reste." (Aristote)
Elle remplacerait " la Philosophie [qui] est appelée la science de la vérité " (idem[189]). Telle aurait été au demeurant la doctrine ésotérique et véritable de Platon, d'après Aristote, si l'on en croit une légende rapportée par Aristoxène de Tarente :
" On avait annoncé une leçon de Platon sur le Bien. Foule d'auditeurs qui espèrent que Platon parlera de ce que les hommes considèrent comme bien : santé, fortune, force, perfection du bonheur en un mot. Mais tous les discours de Platon portent sur la mathématique, l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie. Et Platon va conclure ; le Bien, c'est l'Un. Paradoxe qui déconcerte l'auditoire : une partie même prit la fuite."[190]
Avant sa conversion à la religion proprement dite, Pascal ne voyait-il pas dans la Mathématique le but final de la vie ?
" La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques."[191]
A d'incertains *Principes de la philosophie* (Descartes) se substitueraient avantageusement de solides *Principia mathematica* (Russel et Whithead).

Ceux-ci ne réaliseraient-ils pas le rêve d'une discipline capable de répondre à toutes ses questions, si l'on en croit certains de ses tenants, disons les « formalistes » pour faire court ?
" Comme exemple de traitement de questions de principe, je citerai la thèse de la résolubilité de tout problème mathématique. C'est une thèse qui reflète notre conviction à tous. Le charme des problèmes mathématiques est en effet que nous pouvons nous dire constamment : s'il y a un problème, cherchez la solution ; cette solution, vous la trouverez rien qu'avec les ressources de la pensée ; car en mathématiques il n'y a point d'*ignorabimus* ! Sans doute ma théorie de la démonstration n'est-elle pas capable d'indiquer en général un moyen propre à résoudre chaque problème mathématique –un tel moyen n'existe pas- mais la preuve que l'hypothèse de la résolubilité d'un problème mathématique quelconque n'est pas contradictoire, est tout à fait de la compétence de notre théorie." (Hilbert[192])
A leur suite n'est-il pas de bon ton de récuser toute autorité de la Philosophie en matière de Science et d'affirmer l'auto-suffisance de cette dernière ?
" la pensée qui doit assurer les mathématiques est elle-même mathématique " (J. Cavaillès[193]).
En fait elle réaliserait ainsi l'Idéal même de la pensée philosophique : la certitude absolue ou le cercle complet de la réflexion.

Pourtant il s'en faut que la Mathématique jouisse du statut exceptionnel et exemplaire que quelques-uns sont tentés de lui attribuer et qu'elle puisse prétendre à la sui-réflexivité. Elle-même d'ailleurs n'en réclame pas tant, consciente qu'elle est de ses limites, nonobstant les déclarations imprudentes de ses thuriféraires inconséquents. Un autre « formaliste », Gödel, relevant un défi de Hilbert contenu dans *Les Fondements de la Mathématique*, a en effet démontré, par des voies purement mathématiques, qu'aucun système axiomatique (id est mathématique) –à commencer par les *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead-, ne pouvait être à la fois *consistant* (id est non contradictoire) et *complet* (id est apte à englober en lui tous les énoncés vrais possibles). Il a ainsi établi, contre le programme logiciste hilbertien, qu'il existe des *propositions indécidables* à l'intérieur même de cette science ou, ce qui n'en

188 *op. cit.* 11. 20 et Descartes, *Le Monde* in A.T. XI p. 476 ; cf. égal. Leibniz, *S.U.* in Ph. Sch. VII p. 191 (Ger.)
189 *Méta*. A. 9. 992 a 30 et α. 1. 993 b 20
190 *Elém. harmoniques* 2. 20. 16-31. 3. ; cf. Cours Introd. gale 3. B. 1. p. 43
191
192 *Sur l'infini* in J. Largeault, *Logique mathématique* Textes pp. 236-237
193 *Transfini et Continu* in *Philo. mathématique* p. 261

est qu'un corollaire, qu'on ne peut construire de proposition *p* énonçant la consistance d'un système *S*, telle que *p* appartienne elle-même à *S*, déniant ainsi à la mathématique toute possibilité d'articuler l'« ensemble de tous les ensembles », soit une réflexivité véritable, sous la forme d'une auto-vérification[194].

Certes on retrouve ces mêmes « impossibilités» dans n'importe quel discours, ne fût-ce que sous la forme du fameux *Paradoxe d'Épiménide le Menteur* dans la parole ordinaire, ou du *Principe d'incertitude* de Heisenberg en physique. Mais alors que ces derniers, et particulièrement le premier, acceptent parfaitement une telle situation, n'ayant point fait du Principe de non-contradiction un préalable absolu, mais assument la *contra*-diction comme une modalité de la *diction*, le *Théorème d'incomplétude* de Gödel, sans nullement ruiner la Mathématique, -comme l'ont interprété trop rapidement certains-, puisqu'au contraire il signifie son impossibilité de sombrer dans la stérile Identité, donne son congé à la formalisation – logicisation complète de la science ou, mieux, il témoigne de la ligne infranchissable pour une logique fondée sur le Principe de non-contradiction ou d'identité et de la nécessité d'une autre logique, plus compréhensive.

Se trouve dès lors définitivement invalidée la *Théorie logique des types* de Russel, par laquelle le mathématicien se donnait l'illusion de se prémunir contre les paradoxes, en interdisant l'usage des énoncés auto-référentiels, alors que ces derniers réfléchissent l'essence du Langage et que la théorie même du logicien ne saurait les éviter, dès lors qu'elle prétend se prononcer sur la nature de toutes les propositions, les siennes incluses[195]. Cantor, dont se réclame par ailleurs le logicien anglais, n'eût jamais souscrit à un tel interdit, lui qui laissait largement ouverte la question de savoir si, « au-delà » des nombres infinis ou transfinis, il n'y avait pas encore place pour " l'absolu " ou " l'Infini Absolu ", autrement dit Dieu, véritable Ensemble de tous les ensembles, puisqu'il est censé s'étendre partout et toujours et exprimer tout, soi-même inclus.

Cet « Être » - qui n'en est en réalité pas un, participant de la catégorie de la relation-, ne tombe indubitablement pas sous la juridiction de la logique mathématique, sauf à perdre son identité ou spécificité. Cela ne signifie nullement qu'il soit impensable ou indicible, mais et précisément que, pour le penser, il faut transgresser les modalités mathématiques du dire qui, contrairement cette fois à ce qu'a pu envisager le théoricien des ensembles, ne constituent pas " un symbole adéquat de l'absolu "[196], puisqu'elles n'exposent, comme l'a très bien pressenti "Haller ... le poète", qu'une "vide progression à l'infini", au lieu de rendre "présent le vrai Infini" (Hegel). C'est dire qu'elles ne suffisent pas à exprimer tout l'univers du dicible et qu'il importe donc de « revenir » à la source de toute parole ou sens, le Langage seul en mesure d'articuler l'essentiel, l'originaire ou l'absolu.
" La pensée de l’Infini, par exemple de l’éternité, n’a pas besoin de symboles pour être exprimée et comprise. Le cercle ne la traduit que bien pauvrement ; tout autre ligne qui revient sur elle-même convient aussi bien. La pensée de l’éternité peut s’exprimer par le langage." (idem[197])
Pour l'énoncer brièvement et sobrement :
" l'infini ne peut pas être quantité, car il serait une quantité déterminée " (Aristote[198])

Au bout du compte le *Théorème de Gödel* exprime sous une forme rigoureuse et ainsi nous rappelle ce que l'on savait depuis longtemps : la *Mathesis* n'est pas <u>la</u> Science mais, et c'est déjà

[194] vide Gödel, *S.P.F.I.P.M.S.A.* Théorèmes VI. et XI. in *Le Théorème de Gödel* II 2 p. 127 et 4 p. 140
[195] vide *T.L.T.* in *C.A.* n° 10 1969 et I. Thomas-Fogiel, *Auto-référence et auto-réflexion* in *R.M.M.* n° 2/2000
[196] *F.T.G.E.* p. 41 n. 2. et *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* in *G.A.M.P.I.* p. 385, Berlin 1932
vide égal. Kant, *C.R.P.* Dial. transc. Chap. III. 5è sec. pp. 486-487
[197] *S.L.* I. 2è sec. chap. II C. b) Note 1. p. 251 et *H.Ph.* III. B. II. 2. b) β) p. 191
[198] *Physique* III. 5. 206 a 3 ; cf. égal. Leibniz, *N.E.* II. XVII. § 1. p. 132

pas mal, <u>une</u> science «hypothético-déductive» qui ne produit ses énoncés qu'«ex suppositione»: " « en partant d'une hypothèse » " (Platon) et non absolument ou réflexivement. Première science certes dans l'ordre chronologique, voire la plus « belle »/rigoureuse d'entre les sciences positives, mais certainement pas Science première / universelle, la Mathesis ne forme que " le prélude de l'air même " et nullement sa substance: " une vraie science ".

A l'instar de la physique, même si c'est sur un mode plus cohérent, elle demeure un savoir conjectural ou hypothétique qui, tout en ordonnant méthodiquement les apparences, n'en dévoile pas le Sens ultime. En cela elle ressemble bien au rêve qui, bien qu'il présente un scénario plausible, n'en révèle jamais directement lui-même la signification.

" La géométrie avec les disciplines qui en sont les suites, nous voyons quelle image de rêve ils se font du réel, et qu'il leur est impossible d'en avoir une vision de veille, aussi longtemps que les hypothèses dont ils se servent, ils les laissent sans y toucher, faute d'être capables de les justifier ; quand en effet le commencement est une proposition dont on n'a point le savoir, quand la fin et les propositions intermédiaires se sont liées ensemble à partir de ce dont on n'a point le savoir, quel moyen y a-t-il de faire une vraie science avec un pareil système de propositions qui s'accordent ?"

Conséquemment le père de la philosophie ne verra dans le Principe de non-contradiction qu'un principe subordonné, envisageant un régime autre/ supérieur de la pensée, auquel il n'a cessé de tendre tout au long de son oeuvre.

" La grande découverte qu'il nous resterait donc, à ce qu'il semble, à faire maintenant, c'est celle de ce qui participe de l'un et de l'autre de ces termes : être, non-être, et à quoi la qualification de « sans mélange » ne s'appliquerait correctement, ni par rapport à l'un, ni par rapport à l'autre ;"

Il en théorisera du reste le contenu dans les *Dialogues* de la maturité, et particulièrement dans la "divagation" du *Parménide*[199]. Vouloir reconstruire par contre l'intégralité du Savoir sur l'unique base de l'entendement mathématique ne conduirait qu'à édifier un bâtiment fragile : sans fondements, et vide : sans substance.

" Le géomètre, en suivant sa méthode dans la philosophie, ne construirait que des châteaux de cartes " (Kant[200]).

C'est donc en vain que Gödel, oubliant ses propres démonstrations antécédentes, tentera, à la fin de sa vie, de formaliser la preuve a priori de l'existence de Dieu.

Aristote ne dira pas autre chose que son maître, en insistant sur le caractère conditionnel de la nécessité ou vérité mathématique.

" En effet, la droite étant telle, il est nécessaire que le triangle ait ses angles égaux à deux droits ; mais la vérité de la conséquence n'entraîne pas celle de l'hypothèse ; toutefois si la conséquence n'est pas vraie, la droite n'existe plus."

Et il évoquera également une autre logique, plus subtile, transcendant la non-contradiction, soit une logique sans tiers exclu, admettant, fût-ce sur un mode flou, deux valeurs "à la fois".

" Mais pour les contraires dont l'un ou l'autre n'appartient pas nécessairement au sujet, il existe entre eux un intermédiaire."[201]

Tous les philosophes du reste, y compris ceux qui se sont illustrés dans la discipline mathématique et qui avaient parfois donné l'impression de lui soumettre toute connaissance, ont clairement défini ses bornes ou les contours de son champ d'application et donc de sa validité. Ils auraient sinon cessé de pratiquer la métaphysique, pour ne s'adonner qu'à la science mathématique.

Ainsi Descartes par sa supposition d'" un Dieu qui peut tout " ou d'" un certain mauvais génie, non moins usé et trompeur que puissant " qui me tromperait même sur des vérités évidentes, telle l" addition de deux et de trois " relativise la justesse des propositions mathématiques.

---

[199] *Ménon* 86 e (cf. égal. *Rép*. VI 510 b–511 b) ; *Rép*. VII 531 d ; 533 bc ; V 478 de et *Parm*. 136 e ; vide Cours Introd. g^{ale} 3. A. p. 36 et B. pp. 40-41) ;

[200] *C.R.P.* Méthod. transc. chap. I. 1ère sec. p. 555

[201] *Physique* II. 9. 200 a 17 (cf. *Anal. Post*. I. 3. 72 b 18-33 ; II. 3. 90 b 9 ; 24-27 et 7. 92 b 15) *Méta*. Λ. 10. 1075 a 10-12 (vide Cours Introd. g^{ale} 3. A. p. 39) et *De Interpret.* 10. 12 a 10

Si " triangle " alors " les trois angles sont égaux à deux droits ". Mais rien ne prouve qu'un "triangle rectiligne" existe vraiment. Toutes les vérités dépendent en cette science de Dieu (Autre Chose) et non l'inverse.

" Que les vérités mathématiques, lesquelles vous nommez éternelles, ont été établies par Dieu et en dépendent entièrement aussi bien que tout le reste des créatures."

D'où l'impossibilité de " la géométrie " et de " la science " en général pour " un athée "[202], id est pour un sujet qui ne raisonnerait que sur la base de la logique analytique ou formelle. Leibniz en conclura lapidairement :

" Pour ce qui est des *vérités éternelles* [mathématiques], il faut observer que dans le fond elles sont toutes conditionnelles et disent en effet : Telle chose posée, telle autre chose est."

Quant au " très pénétrant Pascal " (idem[203]), il aura formulé tout cela en son langage clair et simple dans ses fragments visant à un éclaircissement *De l'esprit géométrique*.

" Ces choses étant bien entendues, je reviens à l'explication du véritable ordre, qui consiste, comme je disais, à tout définir et à tout prouver. Certainement cette méthode serait belle, mais elle est absolument impossible : car il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir en supposeraient de précédents pour servir à leur explication, et que de même les premières propositions qu'on voudrait prouver en supposeraient d'autres qui les précédassent ; et ainsi il est clair qu'on n'arriverait jamais aux premières."

Et il sera tenté d'y lire une borne insurmontable pour la raison humaine –" car ce qui passe la géométrie nous surpasse "-, préférant renvoyer au " cœur ", c'est-à-dire à l'incompréhensible, la position des premières vérités.

" Le coeur sent qu'il y a trois dimensions dans l'espace, et que les nombres sont infinis ; et la raison démontre ensuite qu'il n'y a point deux nombres carrés dont l'un soit le double de l'autre."[204]

Il aura ainsi anticipé la conclusion « ironique » - sceptique du logicien contemporain :

" Les mathématiques peuvent être définies comme la science dans laquelle on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce que l'on dit est vrai." (B. Russell[205])

Mais là où tous deux voyaient la limite radicale de notre pensée, il est loisible, tout en partant du même constat, d'observer qu'il ne s'agit que de la frontière de l'entendement mathématique et non de la limite de tout savoir. En effet conformément " aux particularités de leur matière " (la spatialité ou le nombre), les mathématiciens se doivent de partir de *Données* ou d'*Éléments* indispensables au déroulement de leurs démonstrations. En procédant ainsi, " la science euclidienne " réalise son projet : présenter les *propriétés formelles* des êtres, elles-mêmes jamais premières, par définition, mais toujours tributaires des êtres dont elles sont les propriétés, soit en fait d'autres propriétés, sans point d'arrêt ultime possible. Elle relève donc nécessairement de la logique du Si ... alors.

" La science de la géométrie a à trouver quelles déterminations s'ensuivent si certaines autres sont présupposées ; la chose principale est, alors, que les déterminations présupposées et celles qui en dépendent constituent une unique totalité développée. Les propositions principales de la géométrie sont celles où un tout est posé et où il est exprimé en ses déterminités." (Hegel)

La parfaite adéquation de la logique ou méthode mathématique et de son objet ne signifie cependant aucunement qu'ils forment l'unique modalité de la pensée ou vérité humaine. L'«incomplétude» de cette science n'exige-t-il pas son dépassement ? Et que l'on ne dise pas ce dernier impossible car comment prouverait-on celle-là, si l'on n'était pas soi-même excentré par rapport à elle ? Quiconque perçoit les limites de la mathématique, les a forcément outrepassées ; il a en effet compris " ses limites et donc la nécessité d'un autre savoir " (idem), plus pur et/ou radical encore que la *Mathesis*. Déjà science certes mais pas encore Science

---

[202] *Méd*. 1ère pp. 270 et 272 (cf. *6è Réps*. p. 538) ; 5è pp. 311-312 ; *Let. Mers.* p. 933 (cf. *D.M.* 4è p. pp. 151-152; *Méd. 5è* pp. 315-316 ; *5è Réps*. p. 501 ; *6è* p. 535 et *Let.* pp. 938, 1167 et 1309) ; *Méd*. 5è p. 316 ; *2ndes Réps*. p. 376 et et *6è Réps*. p. 531 (cf. *Let*. p. 1137)

[203] *N.E.* IV. XI. § 14 p. 395 et *M.C.V.I.* p. 155

[204] *D.E.G.* pp. 167 et 165 et *P.* 282. ; vide Aristote, *Anal. Post*. II. 3. et Frege, *P.A.* Introduction in Belna p. 344

[205] *Mystique et Logique* p. VII (Payot)

complète, plutôt une image de celle-ci –" une image de l'Idée " (idem[206])-, tel est le statut de la mathématique, dont nul, pas même le mathématicien professionnel, pour autant qu'il est homme et pas seulement homme de science, ne peut se satisfaire pleinement.

" Je me suis interrogé sur le sens de cette persistance opiniâtre de la passion mathématique dans ma vie. Quand je la suis, elle n'emplit pas vraiment ma vie. Elle donne des joies, et elle donne des satisfactions, mais elle n'est pas de nature par elle-même de donner un véritable épanouissement, une plénitude." (A. Grothendieck[207])

Inapte à légitimer ses propres fondements, la mathématique dessine en creux la place d'une autre science qui interrogera ceux-ci.

" Aussi n'est-ce pas au géomètre d'étudier ce qu'est le contraire, ou le parfait, ou l'Être ou l'Un, ou le Même, ou l'Autre, mais il se bornera à en poser l'existence comme principe de raisonnement." (Aristote)

Par rapport à la connaissance mathématique, science dépendante ou dérivée, cette autre science se nommera la Philosophie première.

" Il est manifeste que leur (celui des *axiomes*) examen est l'objet d'une seule et même science, et que cette science est celle du philosophe. (...) Étant donné que même le mathématicien ne se sert des axiomes qu'en les appliquant d'une manière appropriée à son objet, l'étude des principes des mathématiques relèvera aussi de la Philosophie première." (idem)

A l'instar de toutes les sciences positives, le savoir mathématique est certes inhérent à la Philosophie ou la Sagesse, mais il n'en constitue qu'une partie et non la racine ou le socle.

" C'est pourquoi et la science physique et la science mathématique doivent être posées comme des parties de la Sagesse." (idem[208])

En l'absence d'une Science plus haute, basée sur des principes méta-mathématiques (métaphysiques) autres que ceux postulés dans l'*Organon* et plus particulièrement dans les *Analytiques* (Axiomes, Principe de non-contradiction, Syllogisme), jamais le Stagirite, nonobstant ce qu'il a pu penser parfois lui-même, n'eût écrit un mot de sa *Métaphysique*.

" Si Aristote procédait ainsi [selon la syllogistique], il ne serait pas le philosophe spéculatif que nous avons reconnu en lui ; aucune de ses propositions, aucune de ses idées n'aurait pu être formulée et affirmée, n'aurait pu avoir de validité s'il s'en était tenu à ces formes de la logique ordinaire. Il faut se garder de croire qu'Aristote, en tant qu'il est spéculatif, aurait pensé, progressé, démontré selon ces formes qui sont pensées dans l'*Organon* ; car alors il n'aurait pu faire aucun pas en avant, il ne serait parvenu à aucune proposition spéculative." (Hegel[209])

Il suffit de parcourir cette dernière, particulièrement en son Livre Λ où il est question de Dieu, pour s'en convaincre.

Le rôle d'une Logique ou Pensée authentique, véritable, totale ne peut échoir qu'à une Science inconditionnelle qui, tout en se fondant elle-même, procure aux autres connaissances leurs fondements, compris cette fois comme des principes partiels ou régionaux.

" Une seule science est anhypothétique, les autres reçoivent d'elle leurs principes;" (Proclus[210])

Seule une telle Science peut prétendre à la complétude ou l'exhaustivité et s'avère ainsi absolument supérieure aux mathématiques, capable en tout cas d'engendrer un système, une totalité ou vérité que celles-ci cherchent vainement à atteindre.

" Les mathématiques ne constituent pas un *tout* aussi fermé que les philosophèmes, qui, considérés objectivement, font espérer l'idée d'un système entre eux." (Kant[211])

On rabattra donc des prétentions des mathématiciens à répondre à l'Idéal de la Connaissance.

" La mathématique n'est donc pas un idéal de science si angélique, pas même du point de vue purement mathématique." (Husserl[212])

---

206 *S.L.* I. 2è s. ch. II A. Note 2. p. 226 ; II. 3è s. ch. II A. b) 3. 1. p. 528 ; *E.* II. § 26 add. pp. 359-360 (cf. égal. *Ph.R.* 1ère partie chap. II. 2è sec. III. 1. p. 178) ; *Phén. E.* Préf. I. p. 39 et *E.* II. § 256 add. p. 360 ; cf. égal. *S.L.* III 3è sec. chap. II A. b) 3. 1. p. 531

207 *R.S. Réflex. passé mathématicien* (Montpellier 1985) cité par F. Patras in *P.M.C.* VII p. 162 (PUF 2001)

208 *Méta*. Γ. 2. 1005 a 12 (cf. égal. 30) ; 3. 1005a 21 - K. 4. 1061b 17 et 33 ; vide Fichte, *D.S.* 1804 III. p. 45

209 *H.Ph.* Aristote p. 605 ; cf. égal. *.L.L.* 1831 pp. 25-26

210 *C.P.L.É.E.* 75. 9.

211 *O.P.* 6. p. 47

212 *I.L.T.C.* § 31 b) p. 206

Et on condamnera toutes les tentatives, aussi bien passées –Spinoza et son *Ethica Ordine Geometrico demonstrata*- que présentes –Wittgenstein et son *Tractatus logico-philosophicus*-, qui, en dépit de l'« évidence » platonicienne, persistent à envisager la démonstration mathématique comme la norme même de toute démonstration ou de toute véracité.

" Que ces méthodes, si essentielles et au succès si brillant dans leur champ propre, soient inutilisables pour la connaissance philosophique, cela ressort de soi-même, puisqu'elles ont des présuppositions et que la connaissance s'y comporte comme entendement et comme progression à même une identité formelle. Chez *Spinoza*, qui fit usage principalement de la méthode géométrique, et cela pour des concepts *spéculatifs*, le formalisme de cette méthode frappa aussitôt." (Hegel)

En toute rigueur on qualifiera la mathématique de " science secondaire " et l'on exclura en tout cas de vouloir en " appliquer [la méthode] à la philosophie " (idem[213]). Le mathématicien - philosophe Descartes corrobore entièrement ce point de vue, lui qui n'a cessé de s'" occuper ... de sciences un peu plus élevées [que cette mathématique universelle] " et d'affirmer la supériorité des démonstrations / raisons métaphysiques sur les démonstrations mathématiques.

" J'estime que celles [les raisons] dont je me sers ici, égalent, voire surpassent en certitude et évidence les démonstrations de géométrie ".

Ce sont donc bien celles-là et non celles-ci qui détiendraient " la clef des autres sciences" et l'absence de ces dernières de l'" arbre " du savoir -dont " les racines sont la métaphysique "-, sera perçue non comme le témoignage de leur prévalence mais comme celui de leur proximité du " tronc [qui] est la physique ".

Et de fait que sont les entités mathématiques sinon des « objets » quelconques ? Elles ont donc nécessairement un lien avec l'objectivité physique en général. Sans se réduire aux choses, les êtres mathématiques en sont les formes pures ou possibles. Entre les deux il ne saurait en tout cas y avoir hiatus mais au contraire convenance, à défaut d'identité, d'où du reste l'applicabilité des uns aux autres et la quasi évidence des axiomes euclidiens ou non, étant entendu que les seconds sont traductibles dans les premiers.

" Les premières notions qui sont supposées pour démontrer les propositions géométriques, ayant de la convenance avec les sens, sont reçues facilement d'un chacun ;"[214]

En quoi leur étude peut être assimilée à une Physique abstraite certes mais gardant néanmoins un lien avec le ou la physique tout court dont elle offre une présentation épurée. C'est en celle ou celui-ci et donc dans les choses concrètes qu'elle trouve sa base.

" L'ordre mathématique ne diffère du physique, que par l'abstraction qu'opère l'esprit à partir des choses concrètes." (Leibniz[215])

Malgré son incessante valorisation de la mathématique, A. Comte ne s'opposera pas moins à " cette prétendue philosophie mathématique " qui, oubliant " les limites philosophiques du vrai domaine mathématique " –l'astronomie ou la physique-, se fait l'apôtre d'" une vicieuse utopie mathématique ", selon laquelle ce dernier s'étendrait à et se subordonnerait tout, alors qu'un telle fonction incombe à la science humaine par excellence, " la science sociologique ", la seule à exprimer " le point de vue humain" en général. Pointant " la profonde insuffisance de l'esprit mathématique ", le théoricien du positivisme lui accordera au final la place d'" un berceau " mais nullement d'" un trône " de la rationalité[216].

Le Principe sur lequel repose la rationalité mathématique -le Principe de non-contradiction-, loin d'être du reste un principe universel, ne vaut en fait que pour les êtres mondains (physiques) ou les objets qui, faute de dire quoi que ce soit, ne peuvent pas effectivement se

---

[213] *E.* I. § 231 R. et *S.L.* Préf. 1ère éd. p. 8 et Introd. p. 39
[214] *R.D.E.* IV. p. 51 ; *Méds.* Lettre-Dédicace p. 260 (cf. *2ndes Réps.* p. 389 et *D.M.* 4è partie p. 150)
Lettre du 12/9/1638 p. 1023 ; *2ndes Réps.* p. 388 et vide supra 2. A. p. 23
[215] *D.V.T.M.S.* XVII. p. 93 (Vrin)
[216] *C.P.P.* 58è L. pp. 399-402 ; 418 et 423 ; cf. égal. *D.P.E.P.* pp. 199-200 et 278 et supra Introd. p. 3 note 15

contre-«dire» : il leur suffit d'être ce qu'ils sont et de n'être pas ce qu'ils ne sont pas. Par contre ce principe perd toute validité au niveau des êtres psycho-logiques ou spirituels, les sujets, qui passent leur temps à se contredire, ne se posant qu'en s'op-posant les uns aux autres et à eux-mêmes. C'est pourquoi le *discours* mathématique, à supposer qu'on puisse le qualifier ainsi, n'a qu'une portée limitée, impuissant qu'il est à réfléchir de tels êtres qui, soulignons le d'emblée, ne sont pas à proprement parler des «êtres» mais de pures «relations» sous-tendant toutes les relations, y compris les rapports mathématiques, car, et jusqu'à preuve du contraire, la mathématique est un produit de l'esprit (humain) et non l'inverse. Jamais avec sa seule méthode, la mathématique ne rendra compte d'elle-même ou de la pensée (sujet) qui y préside, cette dernière primant / transcendant les catégories mathématiques.
" Elle [la nature intelligible] est la nature première qui n'a ni mesure ni limite à sa grandeur ; par elle on mesure le reste, mais ce qui est puissance universelle n'a nulle part de grandeur déterminée." (Plotin[217])

Certes on peut toujours et l'on ne s'en prive pas, essayer d'estimer mathématiquement la « psychê », en lui appliquant une échelle métrique, comme on le pratique en psycho-métrie, dans les tests d'intelligence par exemple, encore ne faut-il pas oublier, sous peine de transformer un droit légitime en usurpation pure et simple, que, ce faisant, on ne mesure en réalité que quelques extériorisations, performances ou produits de l'intelligence et nullement, comme on se plaît parfois à l'imaginer, l'intelligence *en tant que telle* qui elle, échappe nécessairement aux tests, puisqu'elle forme l'instance qui les crée.

De manière plus générale, toutes les productions humaines/morales/psychiques, excèdent toute détermination purement quantitative et relèvent d'un autre ordre d'estimation : le concept.
" C'est la chose est claire, que nous diviserions, ainsi qu'il a été dit, l'art de mesurer en y faisant deux sections : dans une partie de cet art nous placerions l'ensemble entier de tous les arts où l'on mesure par rapport à leurs opposés un nombre, une longueur, une profondeur, une largeur, une vitesse ; dans l'autre partie, tous les arts qui ont en vue la juste mesure, le convenable, l'opportun, l'obligatoire, et, d'une façon générale, tout ce qui est venu fixer sa résidence en ce qui tient le milieu entre les extrêmes." (Platon)
L'Homme, l'être pensant -psycho- ou socio-logue- n'est pas un nombre, quel que soit la grandeur de ce dernier. Et l'application de celui-ci aux hommes ne vaut que si l'on se rappelle qu'on ne saisit par lui que l'aspect externe de l'homme, son individualité -ce qu'ils ont de commun avec les choses- mais en aucun cas leur être propre.

Quelle que soit l'abstraction ou l'idéalité de la mathématique, il s'en faut qu'elle représente une idéalité complète. Sa généralité n'est qu'une généralité formelle, son abstraction qu'une abstraction partielle qui s'arrête à la forme d'existence des choses dites réelles ou des objets, uniques êtres pleinement comptables et figurables. Elle part/ présuppose des "données réelles" qu'elle re-produit ou schématise mais qu'elle ne « produit » pas, comme le font les artistes.
" (Car ceux-là [les géomètres, les astronomes, les calculateurs ...] font, eux aussi, métier de chasseurs ; ces divers spécialistes ne fabriquent pas en effet, chacun, la représentation figurée qui est leur objet, mais ce sont les données réelles qu'ils soumettent à leurs investigations) " (idem[218]).
Plutôt que de (re)«construire», rendre compte rationnellement du monde réel, les mathématiciens en admettent parfaitement l'être, lui donnant simplement une forme exacte ; et pour ce faire ils se plient fatalement aux réquisits de ce dernier, à commencer par la spatialité des data réels (sensibles).

Tout en tirant d'eux-mêmes les constructions (figures ou schèmes), ils restent asservis à la nécessité de voir celles-ci correspondre aux images, intuitions ou représentations empiriques / externes de l'objectivité perçue et s'interdisent ainsi de régresser vers l'acte générateur même de leurs schématisations, ce qui est le but du philosophe.

[217] *Ennéades* VI. 5. 11. (p. 210)
[218] *Le Politique* 284 a et *Euthydème* 290 c

" Il est vrai que l'objet des mathématiques n'est pas plus extérieur au savoir que celui de la philosophie. Toute l'existence des mathématiques repose sur l'intuition, mais sur une intuition extérieure. A cela s'ajoute encore que le mathématicien n'a pas affaire à l'intuition (construction) même, mais au construit, à ce qui peut être représenté extérieurement, alors que le philosophe ne s'intéresse qu'à l'acte de la construction, qui est un acte absolument intérieur." (Schelling[219])

Bien comprise, la *Mathesis* ne saurait être confondue avec la Science ou le Savoir absolu, censé lui ne rien présupposer mais tout justifier / rationaliser.

En bref la mathématique partage avec l'empirisme et/ou le matérialisme le postulat de l'existence sensible, auquel elle voudrait, tout comme eux, conformer toute la réalité.

" Considéré de plus près, du reste, le point de vue exclusivement mathématique mentionné ici, à l'intérieur duquel la quantité, ce degré déterminé de l'Idée logique, est identifié avec celle-ci elle-même, n'est pas un autre point de vue que celui du *matérialisme*, comme on en trouve également la pleine confirmation dans l'histoire de la conscience scientifique, notamment en France depuis le milieu du siècle passé." (Hegel)

Et vu qu'elle porte, à l'instar de ceux-ci, sur des objets externes, ou du moins sur leur forme, il est logique que ses démonstrations soient incomplètes ou extérieures.

" Le mouvement de la démonstration mathématique n'appartient pas à ce qu'est l'objet, elle est une opération *extérieure* à la chose. ... Dans la connaissance mathématique l'intellection est une opération extérieure, il en résulte que la vraie chose est altérée par là." (idem[220])

Bref qu'elles n'aillent pas jusqu'au bout d'elles-mêmes.

Mais parce son raisonnement se rapporte directement aux choses sensibles, rien d'étonnant que la *Mathesis* consonne avec la *Phusis*, soit avec ce qui se présente à nous naturellement. Se résout par là-même le sempiternel problème du rapport qu'entretiennent la Mathématique et la Physique ou la Nature (Réalité) qu'il nous faut maintenant envisager pour lui-même, d'autant que la solution d'ores et déjà esquissée est tout sauf évidente, la question elle-même ne cessant de ressurgir et de susciter de permanents malentendus. Y revenir s'avère donc indispensable. On confirmera du même coup la nature mondaine et donc toute relative de la discipline mathématique et corrélativement l'obligation de la surpasser.

III. Mathématique et Réalité

Toute science de la nature, à commencer par la Physique trouve incontestablement dans la Mathématique l'instrument ou le langage de sa légitimité ou scientificité.

" Or je soutiens que dans toute théorie particulière de la nature, il n'y a de science *proprement dite* qu'autant qu'il s'y trouve de *mathématique* ; … la théorie de la nature ne renfermera de véritable science que dans la mesure où la mathématique peut s'y appliquer." (Kant[221])

En l'absence d'une langue nous offrant la possibilité d'une expression exacte (nombres, équations, fonctions), il serait rigoureusement impossible d'énoncer des objets précis et a fortiori de formuler des lois physiques valides et vérifiables par tous et qui épousent d'ailleurs toutes la forme d'équations mathématiques.

Comment comprendre cependant que des vérités, censées être purement idéelles, puissent valoir pour des faits présumés être donnés ? En mots plus élémentaires, comment se fait-il que la mathématique s'applique à la physique ?

" La mathématique est le grand instrument de la connaissance de la nature. Mais de quel droit est-elle appliquée à la connaissance de la réalité effective, si les nombres doivent être de simples formes de la pensée, si les lois numériques doivent être de simples lois de la pensée ? Comment se fait-il que <ce> que, dans notre pensée, nous avons arithmétisé convienne à l'effectivité réelle, pour la nature étant en soi ? La nature se soucie-t-elle de notre colligation et de notre dénombrement ? Si l'arithmétique appartient *a priori* à l'esprit pensant, comment comprendre le droit de son application sur l'*a posteriori de la nature* ?" (Husserl[222])

---

[219] *S.I.T.* § 4. p. 133

[220] *E.* I. § 99 add. p. 534 et *Phén. E.* Préf. III. pp. 36-37

[221] *P.P.M.S.N.* Préf. pp. 364, 367-368

[222] *I.L.T.C.* Sec. II chap. V § 31 b) p. 207 ;vide égal. Einstein, *La Géométrie et l'Expérience*

Quel « miracle » expliquerait la concordance de deux êtres ou savoirs supposés étrangers ? A moins qu'il ne faille justement, pour dénouer la difficulté, remettre en cause l'extériorité acceptée de ces termes l'un par rapport à l'autre.

Et de fait, sauf à recourir à une intervention divine, dans le style leibnizien d'" une *harmonie* parfaite ... préétablie "[223], on rendra compte l'efficacité des catégories mathématiques dans les explications physiques exclusivement par le co-appariement des idéalités mathématiques et des représentations physiques sensibles, résultant de leur caractéristique essentielle commune. Pour abstraites ou pures que soient en effet les premières, elles n'en partagent pas moins avec les secondes la propriété de l'être en dehors de soi (l'extension). De même que les secondes donnent à voir des corps étendus (spatiaux), distincts et séparés les uns des autres, les premières élaborent des schèmes qui, bien qu'ils s'enchaînent les uns aux autres, n'en constituent pas moins des entités divisées, scindées, puisque la dé-duction dont ils témoignent n'est pas la leur, mais celle d'une conscience surplombante, le sujet mathématicien, incapable, en raison même de cette altérité, de pousser sa dé-monstration jusqu'au bout.

La « quantité » par exemple, tant continue que discontinue (discrète), demeure rebelle à une rationalisation (unification) complète au cours de laquelle elle justifierait elle-même ses subdivisions –à commencer par sa différenciation entre le continu et le discontinu-, et ne se laisse saisir que comme l'enjeu d'opérations (addition, soustraction, multiplication, division) qu'on lui fait subir et qui présupposent l'indifférence (l'extériorité) de ses parties composantes.
" La quantité est ce qui a des parties les unes hors les autres " (Aristote
En quoi elle montre sa proximité à l'égard des êtres peuplant l'univers matériel. Postulant une juxtaposition similaire entre leurs éléments, les objets physiques et mathématiques se rejoignent, et, dans la mesure où les premiers précèdent chronologiquement les seconds, la Mathématique découvre logiquement dans la Physique un terrain d'application familier et privilégié. Si celle-là thématise bien des « idéalités », elle traite pourtant, comme celle-ci, d'«objets», ses notions étant inséparables d'eux et de leur mode d'être.
" Quelques branches des mathématiques étudient des êtres, immobiles il est vrai, mais probablement inséparables de la matière, et comme engagés en elle ; (...) Et il est clair que les êtres mathématiques ne sont pas séparés, car s'ils étaient séparés, leurs déterminations ne pourraient se rencontrer dans les corps sensibles." (idem[224])
Elle reconnaît dans les choses telles qu'elles se manifestent propres déterminations.

Certes les notions mathématiques ne se fondent en aucun cas sur des qualités sensibles, auxquelles au contraire elles prescrivent leurs normes, transformant d'aléatoires et subjectives sensations de grandeur, charge ou vitesse en mesures objectives de masse, poids ou célérité. Mais elles ne le font qu'en respectant l'identité foncière des images ou de leurs référents, la coextensivité, par opposition à la fluidité du concept. C'est pourquoi les *mathématèmes* «collent» parfaitement et uniquement aux *sensibilia*.
" La mathématique ne s'étend qu'à des *sensibilia*." (Kant)
Tout en déroulant une logique quasi autonome, la *Mathesis* épèle la grammaire de l'Être physique et seulement la sienne. Point besoin, on le voit, de se réfugier dans un Mystère pour légitimer la convenance du mathématique au réel : elle n'est que le strict corollaire du statut même d'une science, à la fois abstraite (pure) concrète (matérielle) ; pure en ce qu'elle énonce des structures universelles (a priori), qui légifèrent sur le donné empirique, et non des combinaisons particulières induites de l'expérience, matérielle (a posteriori) en ce qu'elle explicite celles-là, en faisant fond sur le préjugé qui gouverne déjà celles-ci et dont elle ne s'est jamais entièrement libérée, la croyance en l'être discret et pluriel des étants, autant dire le dogme de la phénoménalité. Ainsi se résout voire se dissout le problème de la relation entre

---

[223] *P.N.G.* 3. p. 391
[224] ; *Méta*. E. 1. 1026 a 15 - N. 3. 1090a 30 ; cf. égal. 6. 1093b27

Mathématique et Monde, sa réalité s'ancrant dans l'identique provenance des deux, soit dans leur communauté originaire. La possibilité de l'une est ipso facto la possibilité de l'autre.

" Le problème posé dans cette section est résolu. La mathématique pure, en tant que connaissance synthétique *a priori*, n'est possible qu'autant qu'elle ne s'applique qu'aux simples objets sensibles dont l'intuition empirique se fonde sur une intuition pure (de l'espace et du temps) et certes *a priori* ; ... La sensibilité sur la forme de laquelle se fonde la géométrie est ce dont dépend la possibilité des phénomènes extérieurs ; ceux-ci ne peuvent donc jamais renfermer autre chose que ce que la géométrie leur prescrit." (idem[225])

Celle-ci n'existerait pas sans celle-là et inversement.

Partant les multiples applications de la Mathématique apparaissent pour ce qu'elles sont, une restitution de ce qu'elle a elle-même par avance emprunté à la représentation du monde. Sans cette reproduction préalable de l'univers corporel, elle n'aurait aucune raison d'être, car elle manquerait alors de sol ferme pour ses constructions. Les points, lignes, plans géométriques et leurs translations n'auraient aucune consistance, sans les points, lignes, plans des corps physiques (solides) et leurs mouvements qui les sous-tendent. Faute d'un tel modèle solide, ses énoncés seraient vides de sens.

" Qu'est-ce que la géométrie pour le philosophe ? C'est l'étude d'un groupe, et quel groupe ? De celui des mouvements des corps solides. Comment alors définir ce groupe sans faire mouvoir quelques corps solides ? (...) *Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.* " (Poincaré[226])

Il n'y a donc pas lieu de distinguer réellement avec Einstein " la ... *géométrie pratique* ... de la *géométrie axiomatique pure* "[227], cette dernière n'existant pas à proprement parler, toute géométrie étant fatalement impure. La *Théorie de la Relativité* contredit au demeurant une telle séparation, elle qui postule le caractère géométrique du champ gravitationnel et qui, réciproquement, démontre la dépendance de l'espace-temps par rapport au système physique des mesures utilisées.

Qui plus est, c'est la mathématique dite appliquée, hors toute signification exclusivement utilitaire de cet adjectif, qui empêche la mathématique prétendument pure de tomber dans un jeu stérile et de surcroît vain, cette discipline étant incapable, nous l'avons suffisamment montré, de s'auto-justifier, c'est-à-dire d'accéder à la Vérité absolue (pure). Or grâce à la première les sciences naturelles acquièrent en retour leurs lettres de noblesse, comme ce fut le cas dès l'antiquité, avec la naissance d'une Astronomie mathématique, dont les pas liminaires furent du reste l'œuvre des premiers mathématiciens (Thalès et Pythagore), puis d'une branche de la Physique, l'Hydrostatique, elle aussi élaborée par un mathématicien (Archimède). Et en cette «application» la Mathématique trouve finalement sa seule défense adéquate possible, une justification purement interne, butant sur les limites de son raisonnement.

" Cette application décisive [de la mathématique à l'astronomie] exerce d'ailleurs une réaction nécessaire éminemment propre à faire dignement apprécier la réalité et la portée des notions mathématiques dont le vrai caractère philosophique ne saurait être convenablement senti par ceux qui n'ont pas accordé une attention suffisante à une telle manifestation." (A. Comte[228])

Au-delà il n'est nullement interdit d'invoquer les réussites pratiques, si avantageuses pour l'homme, de cette application qui confèrent après tout un sens, sinon légitime du moins suffisant, à une discipline qui, réduite à elle-même, ne peut se prévaloir que d'un succès fort borné, jamais en tout cas pleinement satisfaisant pour l'esprit humain, toujours à la recherche d'une Raison ultime qu'elle serait bien en peine de lui fournir.

A mi-chemin entre le penser « abstrait » pur, capable de déduire / produire la substance du réel, comme l'ambitionne la spéculation philosophique, et l'intuitionner « concret » qui admet simplement ce dernier sans le vérifier, le mathématique participe certes déjà du savoir

[225] *Lettre à Schultz* 186 in *Correspondance* p. 329 et *Proléq.* §§ 11 - 13 Rem. I. pp. 45-46 - 50
[226] *S.M.* L. II chap. II p. 118 - *S.H.* 2è partie chap. IV. L'esp. et la géom. p. 86 ; cf. chap. V. L'exp. et la géom.
[227] *G.E.* in *Réfl. Sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité* (Paris, Gauthier-Villars, 1972)
[228] *C.P.P.* 59è L. p. 492

scientifique, mais en en aucun cas d'une science achevée et/ou pleinement démonstrative. Platon avait déjà signalé la modalité mixte de cette connaissance dans sa *Ligne du Savoir* et avait tiré les conséquences qui s'imposaient quant à sa « scientificité », en soulignant à la fois sa rigueur et ses limites. Bien qu'il l'y situe en effet dans l'intelligible, il la représente par un segment équivalent à celui qui symbolise les choses perçues (vraisemblables), elles-mêmes déjà imitées par les objets de l'imagination (simulation), et souligne d'entrée le caractère axiomatique (hypothétique) de sa démarche

" Dans une des sections de l'intelligible, l'âme traitant comme des copies les choses qui précédemment étaient celles que l'on imitait, est obligée dans sa recherche de partir d'hypothèses, en route non vers un principe, mais vers une terminaison ;"[229]

Elle tient ainsi le milieu entre l'empirie et le concept, n'appartenant pleinement ni à l'un ni à l'autre, ou, si l'on préfère, tenant et de l'une et de l'autre.

" Une façon vraiment *mathématique*, c'est-à-dire en ne partant ni de l'empirie, ni du concept (...). La mathématique a affaire aux abstractions du nombre et de l'espace mais celles-ci sont encore quelque chose de sensible, bien que ce soit ce qui est abstraitement sensible et privé d'être-là." (Hegel)

Discipline rationnelle-scientifique assurément, elle n'en reste pas moins lestée du poids de "l'*intuition sensible*", fût-elle "*abstraite*, de l'espace" soit d'"un sensible insensible, et un insensible sensible". En dépit de sa rigueur supérieure, " La Mathématique " forme bien une science positive, s'inscrivant dans le cadre de la *Philosophie de la Nature* dont elle compose le chapitre ou le moment initial, celui de " La Mécanique ".

" La nature ne commence pas par le qualitatif, mais par le quantitatif " (idem[230]).

Quoi qu'en veuillent et disent ses thuriféraires inconditionnels, elle n'est qu'une science : la science des objets, soit une physique, et plus précisément une physique abstraite, par contraste avec la physique concrète ou proprement dite, puisqu'elle ne s'occupe pas du contenu des phénomènes mais seulement de leur forme.

" Ces connaissances [mathématiques] ne concernent que la forme des objets, considérés comme phénomènes " (Kant[231]).

D'où son extrême précision ou son exactitude mais et en même temps son formalisme ou sa plus totale pauvreté, vu qu'elle ne se prononce sur rien, n'usant guère "de la parole" (Platon[232]) mais de simples algorithmes, équations ou formules ; en quoi elle ne forme " pas un discours, même au sens large, mais une «variété » du *Silence* " (Kojève[233]). Sur le contenu / fond : la structure interne ou la substance du réel dont il traite, " le mathématicien est muet " (Pfaff). Son œuvre se limite à en formaliser la configuration ou la structure externe (surface), à l'aide d'un symbolisme opératoire aveugle : figure, nombre, mesure, sans rien nous enseigner de leur contenu (substance).

S'il répond bien à la question du comment, il ne souffle le moindre mot sur le pourquoi. Savoir conditionnel et formel à la fois, la mathématique analyse la contexture des choses mais n'en saisit/synthétise nullement l'*être*, se situant en quelque sorte en deçà de l'intuition même.

" Ce n'est pas de telles non-réalités effectives constituées comme les choses mathématiques que s'embarrassent l'intuition sensible ou la philosophie." (Hegel[234])

A ne se fier qu'aux catégories mathématiques, la physique n'aurait pas de raison d'être, car, bien que celle-ci dépende de celles-là, elle ne s'y résume pas et requiert des principes

---

229 *Rép.* VI 510 b ; vide Cours Introd. g[ale] 3. B. 1.

230 *S.L.* I. 3è sec. chap. I. c) N. p. 389 - *E.* I. §19add. 2. p. 469 ; §231R. ; II. § 254 add. (cf. égal. § 258 R.; *S.L.* L. 3è 3è sec. chap. II A.3. pp. 534-535 et *H.Ph.* Platon p. 467) ; *E.* II. 1[ère] éd. § 199 p. 113 et 2[nde] éd. § 254 p. 193 et *E.* II. § 254 R. p. 194 ; cf. égal. § 263 p. 206

231 *C.R.P.* Log. transc. chap. II. 2è sec. § 22 p. 163

232 *Gorgias* 450 d

233 *Essai hist. raisonnée philo. païenne* I note 9 (p. 52) p. 168

234 *Lettre à Hegel* 1812 in Correspondance n° 203 I. p. 359 et *Phén.E.* Préface III. p. 38

méta-mathématiques ou méta-physiques, et pourquoi pas «moraux» (convenance finalité, ordre), sans lesquels elle ne saisirait " aucune substance " et serait différente voire inintelligible.

" Si les règles mécaniques dépendaient de la seule géométrie sans la métaphysique, les phénomènes seraient tout autres. (...) Ainsi on peut dire que la *nécessité physique* est fondée sur la *nécessité morale*, c'est-à-dire sur le choix du sage digne de sa sagesse ; et que l'une aussi bien que l'autre doit être distinguée de la *nécessité géométrique*. "
(Leibniz[235])

Là où le mathématicien ne regard qu'au possible (forme) dont il opère l'analyse, le physicien a en vue le « réel » (fond) dont il tente l'explication. Tout en épousant la forme générale de la réalité, celui-là n'en épuise nullement le fond. Condition nécessaire de la physique, en ce qu'elle lui garantit une exactitude sans laquelle cette dernière ne pourrait prétendre au titre de science, la discipline mathématique n'en dit pas la substantialité ou la vérité, se contentant de faciliter, grâce à sa langue / technique précise, une maîtrise aussi efficace que possible des phénomènes étudiés par la science naturelle. Pris pour soi, le savoir mathématique se situe ainsi autant du côté de la science que de la pure technique manipulatrice ou ordonnatrice. Revenant sur son « amour » de jeunesse, Pascal confessera :

"Car pour vous parler franchement de la géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit ; mais en même temps je la connais pour si inutile, que je fais peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan. Ainsi je l'appelle le plus beau métier du monde ; mais enfin ce n'est qu'un métier ;"[236]

Or il appartient au Philosophe de se prononcer sur la pertinence de toute technique, vu qu'il n'est concerné par aucun art (pratique ou science) particulier mais uniquement intéressé par la loi (raison ou théorie) universelle qui les systématise.

" Le philosophe n'est pas un artiste de la raison, mais le législateur de la raison humaine." (Kant[237])

Ce faisant il établit le sens et/ou la valeur de chaque science, à commencer par la *mathesis*, dont il montre que qu'elle n'est pas cette Science suprême pour laquelle ses adeptes ou défenseurs ont parfois tendance à la prendre, mais que, malgré ses mérites insignes, elle demande à être dépassée, vers la Physique, au sens propre de ce terme, tout d'abord.

" Il ne me reste plus maintenant qu'à examiner s'il y a des choses matérielles : et certes au moins sais-je déjà qu'il y en peut avoir, en tant qu'on les considère comme l'objet des démonstrations de géométrie, vu que de cette façon je les conçois fort clairement et distinctement." (Descartes[238])

Puis vers toutes les autres sciences jusqu'à leur faîte philosophique.

Première science sans conteste, la Mathématique n'en forme nullement la dernière - l'ultime. Tout en témoignant pour " l'honneur de l'esprit humain " (Jacobi[239]), la Mathématique n'épuise point les exigences de celui-ci et exige en conséquence sa propre transgression. L'existence même des autres sciences le montre à l'envi. Passons donc, sans plus tarder, à celles-ci, afin d'y saisir des vérités davantage « substantielles » et plus proches de la Vérité poursuivie par le Discours philosophique.

---

235 *D.M.* XII. et XXI.
236 vide supra p. 47 et *Lettre à Fermat* du 10/08/1660 ; cf. égal. *Pensées* 61.
237 *C.R.P.* Méthod. tr. ch. III. p. 625 ; cf. égal. Husserl, *R.L.* 1 ch. XI. § 71 pp. 278-281 et *I.L.T.C.* § 31 c) p. 209
238 *Méd.* 6è p. 318
239 vide supra p. 4 note 26 et J. Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Paris 1998

CONCLUSION

Conformément à son nom grec (*mathesis*) signifiant simplement apprentissage, étude ou savoir, la mathématique n'a point d'autre objet ni finalité déclarés que la constitution d'une science générale, valable en elle-même et capable de valoir pour n'importe quel domaine, soit d'une logique universelle. En cela elle rejoint la vocation même de la philosophie. Elle en partage en effet la volonté de fonder un savoir indubitable ou méthodique et systématique ou total, soit une connaissance ou une théorie certaine et valide pour tout. Rien d'étonnant qu'elle soit apparue en même temps que cette dernière et ait germé dans des esprits à la frontière de ces deux matières (Thalès et Pythagore).

Pour répondre à une telle exigence, elle doit, tout comme la philosophie, mettre entre parenthèses les données empiriques / sensibles, sujettes à caution et relatives, et, ne se fiant qu'à la raison, tenter de reconstruire de façon purement intelligible le monde. En aucun cas elle ne saurait donc prendre appui sur l'intuition ou la sensation ou recourir à des matériaux puisés au dehors, sous peine de manquer d'emblée son but ; au contraire il lui importe de n'attendre de secours que du pouvoir de l'entendement ou de l'intelligence, seul en mesure de garantir la moindre certitude et universalité. Aussi on récusera par avance toute tentative d'asseoir les catégories ou les chapitres mathématiques sur le sol de l'expérience -ce nonobstant l'étymologie de certains d'entre eux (*calcul* : caillou ou *géo*-métrie : terre)-, et l'on admettra a priori la nécessité pour le mathématicien de tirer ses concepts de son propre fond.

Et c'est ce qu'il s'efforce effectivement de faire en déterminant lui-même ses objets (*définitions*), leurs relations (*axiomes*) et les conséquences qui s'en suivent (*théorèmes*). Ainsi la discipline mathématique construit un discours autonome, se rapportant non pas à des choses externes particulières et qui lui seraient prédonnées, mais à des êtres indéterminés produits par elle-même et par là-même applicables / substituables à tous. Symbolisables par des figures, des nombres ou des lettres, ces objets idéaux internes « quelconques » ne relèvent point d'une induction concrète mais sont régis par la seule déduction abstraite progressant au fil d'opérations qu'elle institue elle-même et qui confère à cette science le statut d'une logique opératoire pure, ne devant rien qu'à ses propres démarches. Ce raisonnement strictement formel assure à la mathématique sa cohérence, rigueur ou vérité, au point que la démonstration dont elle use est tôt apparue comme le modèle épistémologique par excellence et conséquemment la logique mathématique, basée sur le principe de non-contradiction, comme le paradigme de toute pensée véridique. Elle constituerait de la sorte à la fois l'alphabet, la grammaire et la syntaxe du langage scientifique en général. La physique, dénommée précisément mathématique, ne s'écrit-elle pas en équations/formules mathématiques (*lois*) ? Tout devrait finalement s'énoncer, semble-t-il, dans sa langue, s'il veut voir quelque chance d'être correctement connu / su. Passant pour le parangon de la scientificité, la *Mathesis* a même été, est toujours, tenue par certains pour la réalisation en acte du projet philosophique d'une Science et/ou Vérité absolue.

Seulement il s'en faut que la science mathématique ait les moyens véritables d'une telle ambition. Partant de définitions qui conservent les modalités de la figuration et de la quantification propres à l'être sensible, ne justifiant pas ses propositions premières, postulant en ses raisonnements la validité de principes (identité, non-contradiction) qui ne se vérifient justement qu'au niveau objectif, elle demeure une science incomplète –hypothético-déductive-, applicable uniquement au monde matériel, dont elle ne retient de surcroît que les propriétés externes ou formelles (forme, nombre, ordre), à l'exclusion de son contenu substantiel. Aussi on ne l'assimilera aucunement à la Philosophie, Science réflexive ou totale qui entend ne rien présupposer et ne rien passer sous silence.
" Cette science [la mathématique] n'est pas philosophie, ... elle *ne* part *pas* du *concept* et laisse par conséquent en dehors de sa sphère le qualitatif ... En prétendant que l'*honneur* de la mathématique consiste en ce que toutes les propositions qu'elle contient sont *rigoureusement démontrées*, on a souvent fait oublier ses limites ;" (Hegel[240])

Pour logique qu'elle soit, la Mathématique ne correspond qu'à une logique partielle -la *Logistique*-, qui demande à être relevée par une *Logique* plus concrète –la Physique-, et surtout plus compréhensive et donc vraie, la Métaphysique ou la Philosophie.

---

[240] *S.L.* I. 2è sec. chap. II. C. c. Note 1. p. 303